

# IL CARICO LIMITE DELLE FONDAZIONI SUPERFICIALI ADIACENTI AI PENDII

Orazio Casablanca  
*Università degli Studi di Messina*  
[ocasablanca@unime.it](mailto:ocasablanca@unime.it)

Giuseppe Di Filippo  
*Università degli Studi di Messina*  
[gdfilippo@unime.it](mailto:gdfilippo@unime.it)

## Sommario

Nella presente nota si riportano i valori statici e sismici dei fattori di capacità portante per fondazioni superficiali adiacenti ai pendii, ottenuti mediante il metodo delle caratteristiche, tenendo conto, attraverso l'approccio pseudo-statico, dell'effetto delle forze di inerzia agenti nel terreno di fondazione e di quelle trasmesse dalla sovrastruttura. Le soluzioni proposte, ottenute assumendo i meccanismi di rottura di Hill e Prandtl, sono state confrontate con quelle ottenute attraverso il metodo degli elementi finiti e risultano in ottimo accordo tra loro.

## 1. Introduzione

In condizioni statiche e con riferimento al caso di terreno con piano di campagna orizzontale, la capacità portante delle fondazioni superficiali nastriformi soggette a carichi verticali e centrati viene generalmente valutata utilizzando la nota formula trinomia proposta da Terzaghi:

$$q_{ult} = c' \cdot N_c + q \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \quad (1)$$

Nell'equazione 1  $q_{ult}$  rappresenta il carico ultimo che il terreno può sostenere nell'ipotesi di comportamento rigido-plastico perfetto,  $\gamma$  e  $c'$  sono il peso dell'unità di volume e la coesione del terreno,  $B$  è la larghezza della fondazione,  $q$  è il sovraccarico verticale agente a lato della fondazione e, infine,  $N_c$ ,  $N_q$  e  $N_\gamma$  sono fattori di capacità portante, dipendenti dall'angolo di resistenza al taglio del terreno  $\phi'$ . Per fondazioni vicine o adiacenti a un pendio, l'equazione 1 può ancora essere utilizzata introducendo opportuni fattori di capacità portante o, in alternativa, coefficienti correttivi per tenere conto dell'effetto del pendio sulla capacità portante.

Molte soluzioni disponibili in letteratura consentono di valutare i fattori di capacità portante o i coefficienti correttivi sia in condizioni statiche che sismiche; tali soluzioni sono state ottenute utilizzando il metodo dell'equilibrio limite (e.g. Sarma e Chen, 1995; Narita e Yamaguchi, 1990; Kumar e Kumar, 2003; Castelli e Motta, 2010), il teorema cinematico dell'analisi limite (e.g. Sawada et al., 1994; Askari e Farzaneh, 2003), il metodo delle caratteristiche (e.g. Graham et al., 1988; Kumar e Mohan Rao, 2003; Casablanca et al., 2021) e analisi limite agli elementi finiti (e.g. Chakraborty e Kumar, 2013; Kumar e Chakraborty, 2013; Raj et al., 2018).

In questa nota si riportano i valori dei fattori statici e sismici di capacità portante per fondazioni adiacenti a un pendio ottenuti utilizzando il metodo delle caratteristiche (MC), esteso al caso sismico mediante l'approccio pseudo-statico.

Diversamente dalla maggior parte degli studi disponibili, l'effetto delle forze d'inerzia nel terreno, dovute alla propagazione delle onde sismiche, e l'effetto delle forze d'inerzia agenti sulla sovrastruttura, dovute alla risposta strutturale, sono trattati in modo indipendente; è stato dimostrato che tali effetti possono essere sovrapposti senza errori significativi (Casablanca et al., 2021).

Infine, sono state effettuate delle analisi numeriche con il metodo degli elementi finiti (FE) utilizzando il codice Plaxis (2002) per validare i risultati ottenuti attraverso il MC.

## 2. Metodo di analisi

Il MC si basa sull'ipotesi che il terreno si comporti come un mezzo rigido-perfettamente plastico, secondo il criterio di rottura di Mohr-Coulomb e che nella massa di terreno in condizione di incipiente collasso le equazioni di equilibrio e il criterio di rottura devono essere contemporaneamente soddisfatti. Il sistema di equazioni risultante può essere risolto per ottenere il carico ultimo su una fondazione senza ipotesi arbitrarie sul meccanismo plastico.

In condizioni piane di deformazione, le equazioni indefinite di equilibrio e il criterio di rottura possono essere scritti come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \gamma \cdot k_h \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} &= \gamma \cdot (1 - k_v) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma'_x - \sigma'_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{2} \sin \varphi' + c' \cos \varphi' \quad (3)$$

dove  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  e  $\tau_{xy}$  sono le tensioni efficaci normali e di taglio agenti sui piani orizzontale e verticale e  $k_h$  e  $k_v$  sono i coefficienti di accelerazione sismica orizzontale e verticale che tengono conto dell'effetto delle forze di inerzia agenti nel terreno di fondazione.

Sostituendo il criterio di rottura (3) nelle equazioni indefinite di equilibrio (2) si ottiene un sistema di due equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico. Utilizzando il MC, è possibile trasformare il sistema di equazioni alle derivate parziali in un sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle variabili  $s'$  e  $\omega$ , che rappresentano, rispettivamente, lo sforzo medio  $s' = (\sigma'_1 + \sigma'_3)/2$  e l'angolo formato dalla massima tensione principale  $\sigma'_1$  con l'asse orizzontale  $x$ .

Imponendo le opportune condizioni al contorno, il sistema di equazioni differenziali ordinarie può essere integrato per determinare lo stato tensionale e la rete delle linee caratteristiche ad esso associato, al fine di valutare la capacità portante di una fondazione superficiale.

La determinazione del carico limite di una fondazione superficiale mediante il MC viene effettuata risolvendo successivamente tre problemi di tipo iniziale. La Figura 1 mostra i domini di Cauchy (C), Riemann (R) e Goursat (G) per il meccanismo di Hill (Figura 1a) e per il meccanismo di Prandtl (Figura 1b) associati ai tre problemi.

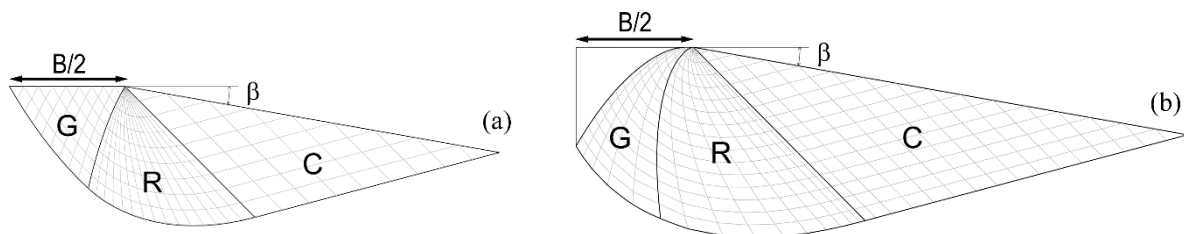


Fig 1. Domini di Goursat, Riemann e Cauchy: a) meccanismo di Hill; b) meccanismo di Prandtl.

In entrambi i casi la linea che delimita superiormente il dominio di Cauchy è inclinata di un angolo  $\beta$  in modo da simulare la presenza di un terreno in pendio adiacente alla fondazione. La valutazione di  $N_c$  e  $N_q$  non comporta particolari difficoltà numeriche. Viceversa, per risolvere il problema di  $N_\gamma$  è stato necessario introdurre un valore finito della sovraccarico laterale  $q$ , assunto nelle analisi pari a  $\gamma B \cdot 10^{-9}$ , il cui contributo sul valore del fattore di capacità portante è del tutto trascurabile.

### 3. Capacità portante in condizioni statiche

Per una fondazione superficiale adiacente a un pendio nel caso di mezzo plastico privo di peso ( $\gamma=0$ ) e in condizioni statiche, il MC consente di valutare le espressioni in forma chiusa dei fattori di capacità portante  $N_{cg}$  e  $N_{qg}$  dove il pedice “g” è stato introdotto per indicare la presenza di un pendio adiacente alla fondazione. Se si considera il peso proprio del terreno ( $\gamma \neq 0$ ) i valori del fattore di capacità portante  $N_{\gamma g}$  possono essere ottenuti tramite il MC solo mediante integrazione numerica delle equazioni di equilibrio plastico.

I fattori  $N_{cg}$ ,  $N_{qg}$  e  $N_{\gamma g}$  (quest'ultimo ottenuto considerando i meccanismi di Hill e di Prandtl) sono riportati in Figura 2, per valori dell'angolo di resistenza al taglio compresi nell'intervallo  $15^\circ \div 45^\circ$  e valori dell'angolo di pendio  $\beta$  fino a  $45^\circ$ .

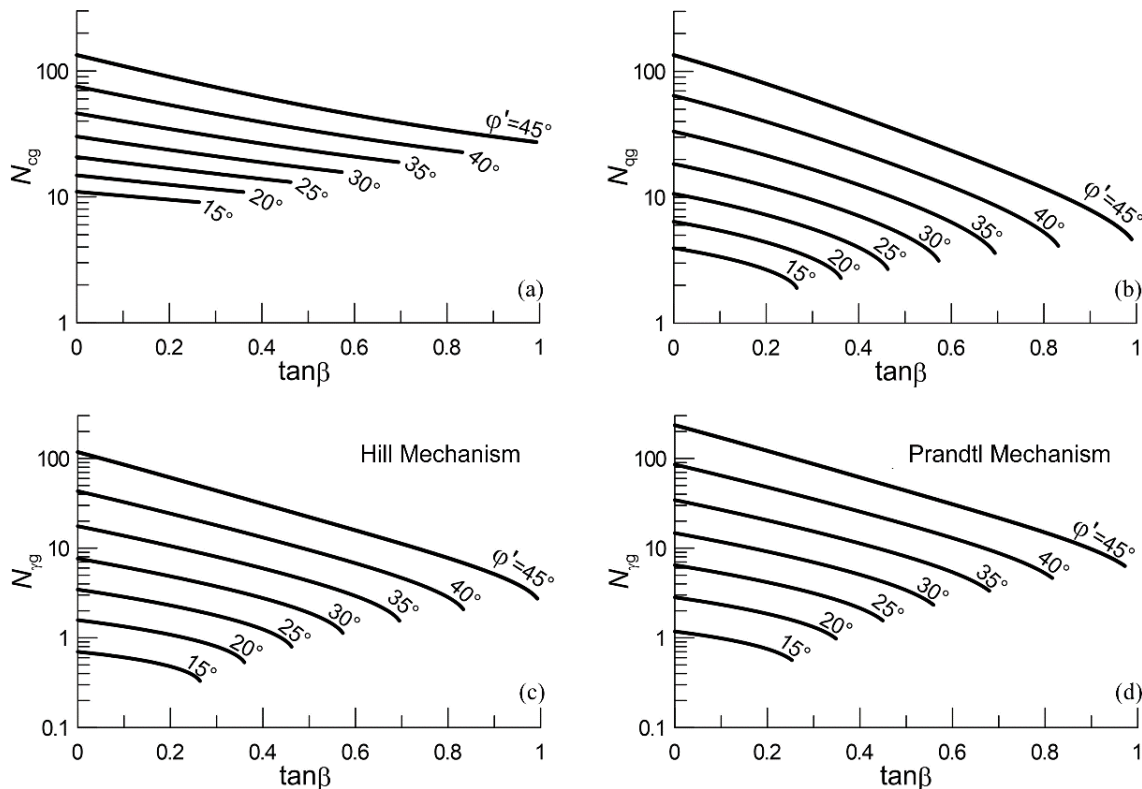


Figure 2. Fattori statici di capacità portante  $N_{cg}$ ,  $N_{qg}$  e  $N_{\gamma g}$  (meccanismo di Hill e Prandtl).

Per ogni curva della Figura 2b-d è possibile valutare un valore limite  $\beta_{lim}$  dell'angolo di pendio per il quale la capacità portante del sistema terreno-fondazione si riduce a zero. Per i fattori  $N_{\gamma g}$  e  $N_{qg}$ , questa condizione è verificata per  $\beta_{lim} = \phi'$  poiché il problema della capacità portante degenera in un problema di stabilità del pendio indefinito. Per quanto riguarda  $N_{cg}$  (terreno dotato di coesione e attrito con  $\gamma = 0$ ), non è possibile definire un valore limite dell'angolo  $\beta$ . Ad esempio, per  $\beta = 90^\circ$  le equazioni risolutive degenerano in quelle relative ad un problema di stabilità di un fronte di scavo a parete verticale con carico uniforme applicato in sommità. In questo caso, essendo il terreno privo di peso proprio, affinché si generi una superficie di scorrimento, il carico applicato in sommità deve essere sempre maggiore di zero, indipendentemente da  $\phi'$ .

### 4. Capacità portante in condizioni sismiche

In condizioni sismiche i fattori di capacità portante sono stati valutati considerando separatamente l'effetto delle forze di inerzia che insorgono nel terreno coinvolto nel meccanismo plastico ( $N_{qgE}^s$  e  $N_{\gamma gE}^s$ ) e delle forze di inerzia trasmesse dalla sovrastruttura alla fondazione ( $N_{qgE}^{ss}$ ,  $N_{qgE}^{ss}$  e  $N_{\gamma gE}^{ss}$ ).

La Figura 3 mostra i valori dei fattori  $N_{qgE}^s$  e  $N_{\gamma gE}^s$  al variare di  $k_h$ , nel caso  $\varphi'=30^\circ$  e per valori dell'angolo di pendio  $\beta$  pari a  $10^\circ$  e  $20^\circ$ ; per confronto, vengono presentati anche i valori calcolati per il caso di piano di campagna orizzontale ( $\beta = 0$ ).

All'aumentare di  $k_h$  i fattori di capacità portante diminuiscono e bruscamente tendono a zero quando si raggiunge il valore limite  $k_{h,lim}=\tan(\varphi'-\beta)$ , il che significa che la resistenza al taglio del terreno è interamente mobilitata per resistere alle forze di inerzia indotte dal sisma nel terreno e la capacità portante si riduce a zero. L'effetto della componente verticale dell'accelerazione sismica è mostrato sempre in Figura 2 per valori del rapporto  $k_v/k_h$  pari a  $\pm 0.5$ . Valori positivi (azioni inerziali dirette verso l'alto) di  $k_v$  influiscono notevolmente sui fattori di capacità portante poiché riducono la componente verticale del sovraccarico  $q$  e delle forze di volume. Viceversa, valori negativi di  $k_v$  hanno un effetto benefico sulla capacità portante rispetto al caso  $k_v=0$ .

Nella Figura 3 sono riportati inoltre, i risultati ottenuti mediante analisi ad elementi finiti (FE). Si può osservare che esiste un ottimo accordo tra i risultati ottenuti utilizzando i due metodi di analisi. Il confronto è mostrato anche in termini di dimensioni del meccanismo plastico come mostrato in Figura 4 dove la rete delle linee caratteristiche è sovrapposta alla mappa degli incrementi di spostamento ottenuta attraverso FE.

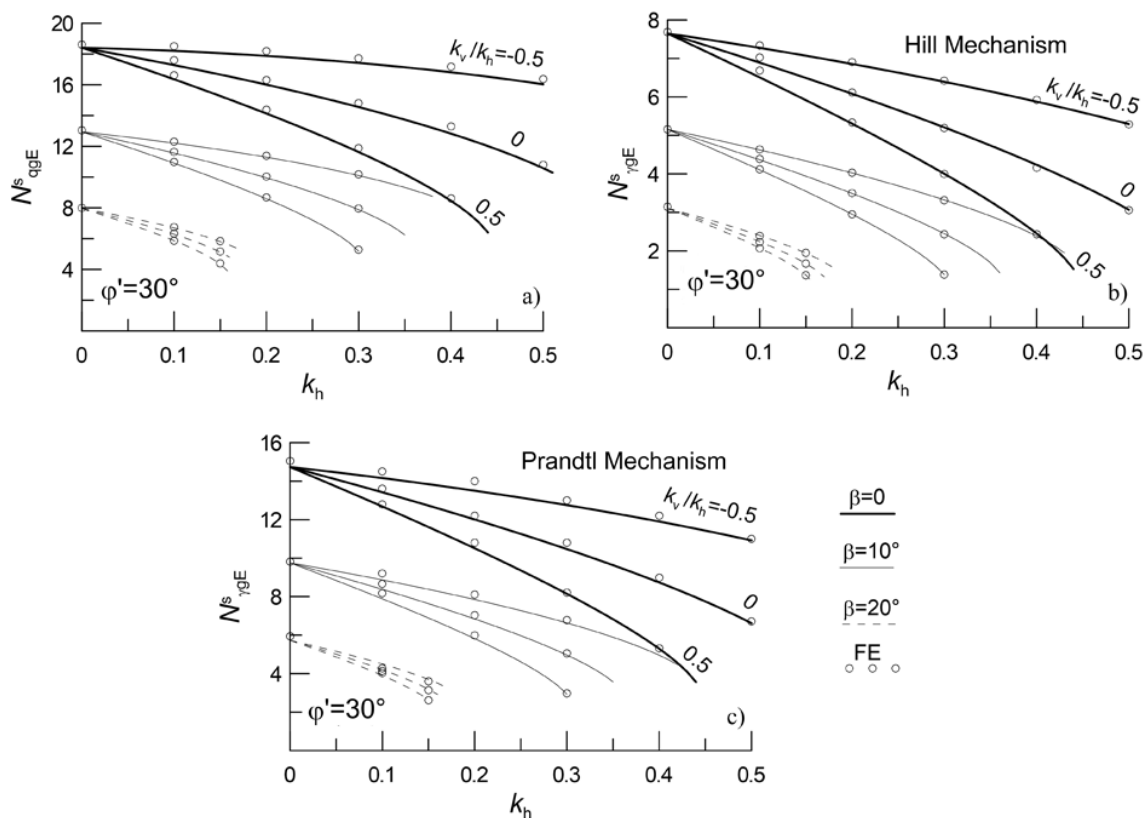


Figura 3. Effetto dell'accelerazione orizzontale e verticale agente nel terreno e confronto con i risultati FE per  $\varphi'=30^\circ$  e  $\beta = 0-20^\circ$ : a)  $N_{qgE}^s$ ; b)  $N_{\gamma gE}^s$  per il meccanismo Hill; c)  $N_{\gamma gE}^s$  per il meccanismo Prandtl.

L'effetto dell'inerzia della sovrastruttura è tenuto in conto nelle analisi applicando un carico in fondazione con angolo di inclinazione  $\theta_i = \tan^{-1}[(k_{hi}/(1-k_{vi}))]$ , dove  $k_{hi}$  e  $k_{vi}$  sono rispettivamente il rapporto tra le forze di inerzia orizzontale e verticale trasmesse sulla fondazione dalla sovrastruttura e la forza verticale. Per il meccanismo di Prandtl non è stato possibile stabilire la corretta condizione al contorno da imporre al dominio Goursat; pertanto, questo caso è stato analizzato solo attraverso analisi FE. La Figura 5 mostra i valori dei fattori  $N_{cgE}^{ss}$ ,  $N_{qgE}^{ss}$  e  $N_{\gamma gE}^{ss}$  al variare di  $k_h$ , per il caso  $\varphi'=30^\circ$ , considerando valori del rapporto  $k_{vi}/k_{hi}$  pari a 0 e  $\pm 0.5$  e angoli di pendio  $\beta$  pari a  $10^\circ$  e  $20^\circ$ ; per confronto, vengono presentati anche i valori calcolati per il caso di piano di campagna orizzontale ( $\beta = 0$ ).

Aumentando  $k_{hi}$ , i fattori di capacità portante diminuiscono fino a raggiungere un valore limite per  $\theta_{i,lim}$ , in corrispondenza del quale il meccanismo per carico limite degenera in un meccanismo di rottura per scorrimento. Il valore  $\theta_{i,lim}$ , indipendente dall'angolo di pendio, è stato derivato in forma chiusa da Kezdi (1961) per il fattore di capacità portante  $N_{cgE}^{ss}$  (Fig. 3a) mentre per i fattori  $N_{qgE}^{ss}$  e  $N_{\gamma gE}^{ss}$  il valore limite è pari a  $\theta_{i,lim} = \varphi'$ . Dal confronto con i risultati ottenuti tramite FE, in termini di valori dei fattori di capacità portante (Fig. 5) e di dimensioni dei meccanismi plastici (Fig. 6), si può osservare un ottimo accordo tra i risultati ottenuti utilizzando i due metodi di analisi.

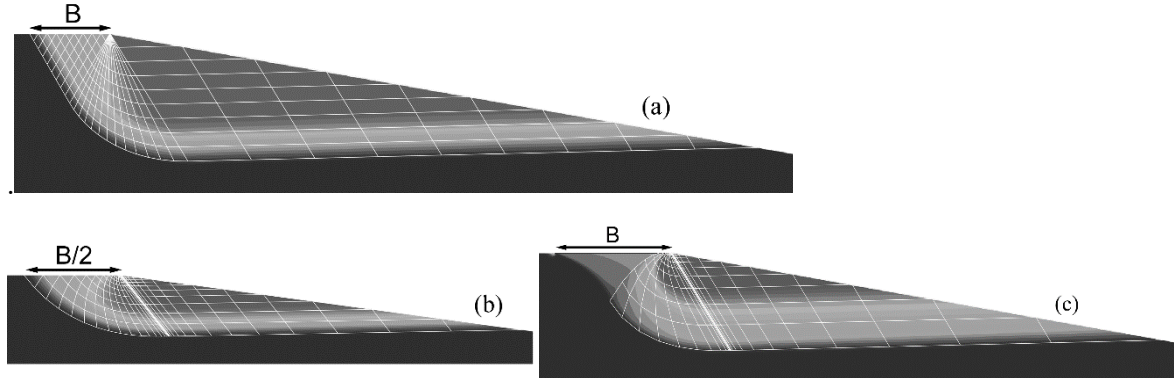


Figura 4. Confronto tra la rete di linee caratteristiche e le mappe degli spostamenti incrementali totali ottenuti tramite analisi FE per  $\varphi' = 30^\circ$ ,  $k_h = 0.3$ ,  $k_v = 0$  e  $\beta = 10^\circ$ : a)  $N_{qgE}^{ss}$ ; b)  $N_{qgE}^{ss}$  per il meccanismo di Hill; c)  $N_{qgE}^{ss}$  per il meccanismo di Prandtl.

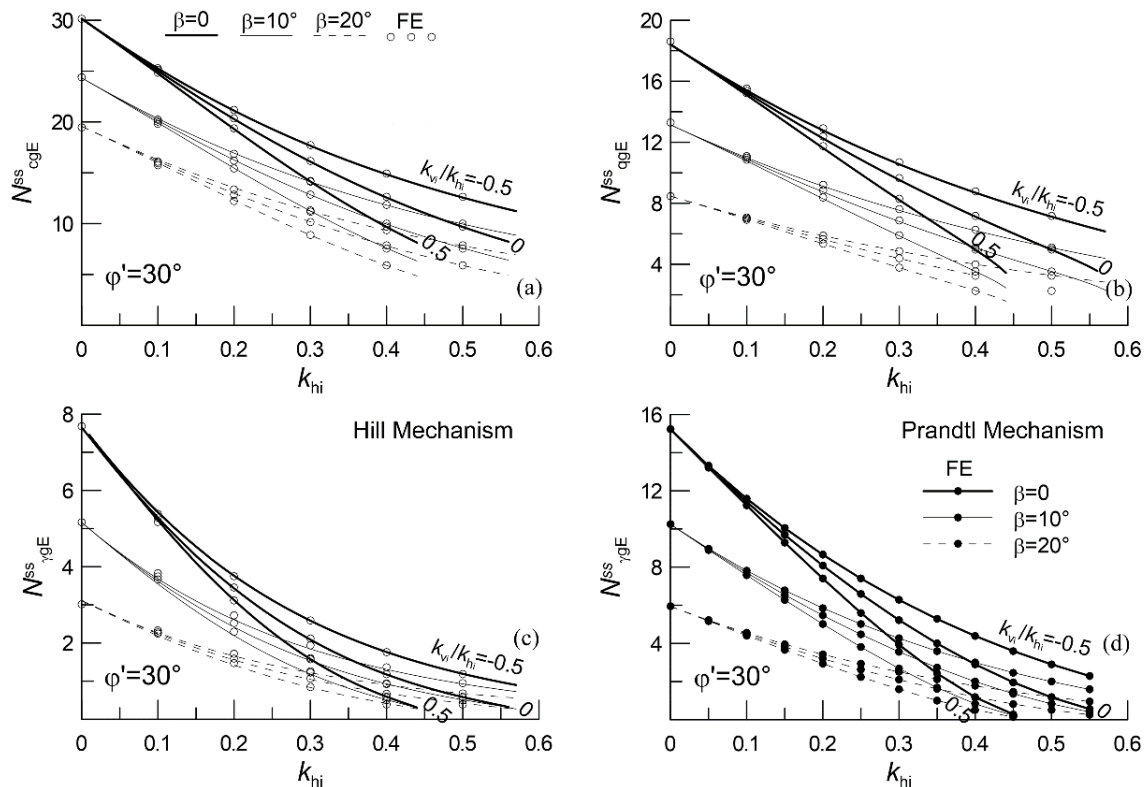


Figura 5. Effetto delle accelerazioni orizzontale e verticale trasmesse dalla sovrastruttura e confronto con i risultati FE per  $\varphi' = 30^\circ$  e  $\beta = 0-20$  a)  $N_{cgE}^{ss}$ ; b)  $N_{qgE}^{ss}$ ; c)  $N_{qgE}^{ss}$  per il meccanismo di Hill; d)  $N_{qgE}^{ss}$  per il meccanismo di Prandtl.

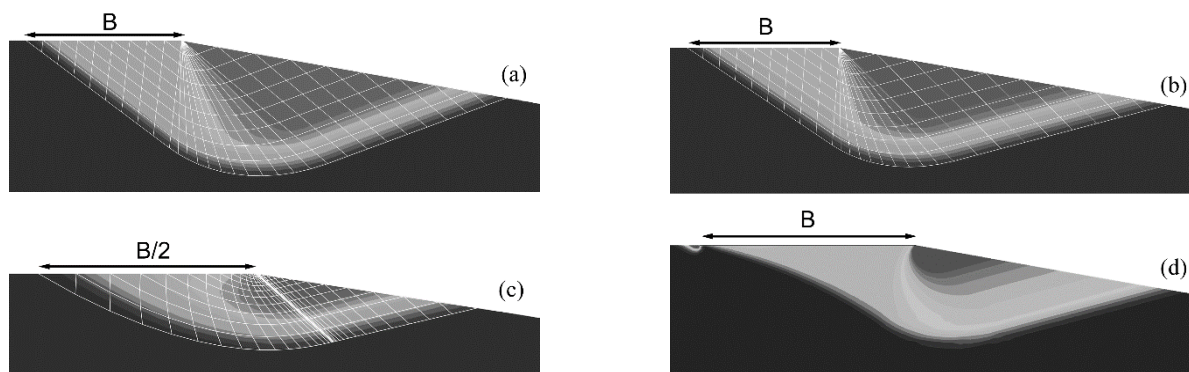


Figura 6. Confronto tra la rete di linee caratteristiche e le mappe degli spostamenti incrementali totali ottenuti tramite analisi FE per  $\phi' = 30^\circ$ ,  $k_h = 0.3$ ,  $k_v = 0$  e  $\beta = 10^\circ$ : a)  $N^{\text{ss}}_{\text{qgE}}$ ; b)  $N^{\text{ss}}_{\text{qgE}}$ ; c)  $N^{\text{ss}}_{\gamma\text{gE}}$  per il meccanismo di Hill; d)  $N^{\text{ss}}_{\gamma\text{gE}}$  per il meccanismo di Prandtl

## 5. Conclusioni

Sono stati valutati i fattori statici e sismici di capacità portante per fondazioni adiacenti ai pendii mediante il metodo delle caratteristiche. Risultati di analisi numeriche effettuate con il metodo degli elementi finiti confermano la correttezza delle soluzioni proposte.

Diversamente dalla maggior parte degli studi disponibili, l'effetto delle forze d'inerzia nel terreno e l'effetto delle forze d'inerzia trasmesse dalla sovrastruttura sono trattati in modo indipendente; come mostrato in altri studi (Casablanca et al. 2021), è comunque possibile sovrapporre tali effetti senza commettere errori significativi. Questo approccio permette di determinare il carico limite delle fondazioni superficiali anche in quei casi in cui l'accelerazione agente sulla sovrastruttura differisce sostanzialmente da quella agente nel terreno di fondazione.

## Bibliografia

- Askari F., Farzaneh O., (2003). Upper bound solution for seismic bearing capacity of shallow foundations near slopes. *Geotechnique*, 53(8): 697–702.
- Casablanca, O., Cascone, E., Biondi, G., Di Filippo, G., (2021). Static and seismic bearing capacity of shallow strip foundations on slopes. *Géotechnique*. <https://doi.org/10.1680/jgeot.20.P.044>.
- Castelli, F., Motta, E., (2010). Bearing capacity of strip footings near slopes. *Geotech Geol. Eng.*, 28(2): 187–98.
- Chakraborty, D., Kumar, J., (2013). Bearing capacity of foundations on slopes. *Geomechanics and Geoengineering: An International Journal* 2013, 8(4): 274–285
- Graham, J., Andrews, M., Shields, DH. (1988). Stress Characteristics for Shallow Footings in Cohesionless Slopes. *Canadian Geotechnical Journal*, 25(2): 238–249.
- Kumar, J., Chakraborty, D., (2013). Seismic bearing capacity of foundations on cohesionless slopes. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.* 139(11): 1986–1993.
- Kumar, J., Kumar, N., (2003). Seismic bearing capacity of rough footings on slopes using limit equilibrium, *Géotechnique*, 53(3): 363–369.
- Kumar, J., Mohan Rao, V., (2003). Seismic bearing capacity of foundations on slopes. *Géotechnique* 53(3): 347–61.
- Narita, K., Yamaguchi, H., (1990). Bearing Capacity Analysis of Foundations on Slopes by Use of LogSpiral Sliding Surfaces. *Soils and Foundations*, 30(3): 144–152.
- Plaxis (2002). V8, Finite Element Code for Soil and Rock Analyses, Plaxis b.v., The Netherlands.
- Raj, D., Singh, Y., Shukla, K. (2018). Seismic bearing capacity of strip foundation 620 embedded in c- $\phi$  soil slope. *International Journal of Geomechanics*, 18(7).
- Sarma, S., Chen, Y., (1995). Seismic bearing capacity of shallow strip footings near sloping ground, 5th SECED Conf., October 1995, Chester, UK, AA Balkema, Rotterdam, 505–512.
- Sawada, T., Nomachi, S., Chen, W., (1994). Seismic bearing capacity of a mounded foundation near a down-hill slope by pseudo-static analysis. *Soils Found.* 34(1): 11–17.