

MODELLAZIONE COSTITUTIVA DI FLUSSI GRANULARI SATURI

Pietro Marveggio
Politecnico di Milano
pietro.marveggio@polimi.it

Claudio di Prisco
Politecnico di Milano
pietro.marveggio@polimi.it

Sommario

In questa nota viene presentato un approccio costitutivo formulato per riprodurre il comportamento di mezzi granulari saturi in condizioni di taglio semplice e soggetti a stati stazionari ad alte velocità di deformazione. Questi stati, che rappresentano condizioni tipiche durante la propagazione di colate detritiche lungo pendii inclinati, sono solitamente simulati in letteratura adottando semplici modelli costitutivi che trattano il materiale saturo come un unico mezzo monofase equivalente, come nel caso del modello Bingham o, più recentemente, quello $\mu-I$. Il modello qui presentato, basato sulla teoria delle miscele, considera la fase granulare e liquida separatamente assumendo uno schema in parallelo tra le due. Il contributo granulare, in condizioni stazionarie, è simulato utilizzando un approccio costitutivo in cui il concetto di stato critico per materiali granulari, originariamente formulato in condizioni quasi statiche, viene esteso in condizioni dinamiche per mezzo delle teorie cinetiche dei gas granulari, aggiungendo la temperatura granulare come variabile di stato per il materiale. In condizioni sature, l'accoppiamento tra le due fasi è legato al fatto che il modello considera la viscosità del liquido dipendente dall'indice dei vuoti, mentre l'evoluzione della temperatura granulare è influenzata dalla viscosità intrinseca del liquido. Il modello è validato su risultati numerici DEM e discusso alla luce di questi ultimi.

1. Introduzione

I fenomeni franosi sono eventi diffusi sull'intero territorio italiano e che coinvolgono vaste aree, a causa della tendenza a propagarsi su lunghe distanze. Il materiale che costituisce il corpo di frana può essere una miscela di materiale a grana fine e grossolana, in condizioni sature, secche o parzialmente sature. Nella fase di iniziale di distacco, il comportamento del terreno può essere tipicamente assimilato a quello di un solido (condizioni quasi statiche), mentre durante la successiva fase di propagazione il materiale tende a scorrere come un fluido (condizioni dinamiche) e i grani interagiscono tra loro per mezzo di collisioni.

Tipicamente l'approccio numerico utilizzato per gli studi di questi fenomeni è diverso per le fasi di innesco e di propagazione/impatto. Per quanto riguarda la fase di innesco, oggetto di studio prevalentemente della comunità geotecnica, gli approcci più popolari consistono in analisi numeriche mediante il metodo degli Elementi Finiti, adottando modelli costitutivi elastoplastici (Cascini et al., 2013). Viceversa le fasi di propagazione e impatto sono studiate mediante approcci provenienti dalla comunità idraulica: analisi numeriche con approcci SPH e basate su legami costitutivi di tipo monofase equivalente (ovvero trascurando la bifasicità dei mezzi granulari saturi) quali il modello Bingham (Bingham, 1916), fluido "frictional" (Vo, et al. 2020) o più recentemente la reologia $\mu-I$. In questo campo di applicazione, è popolare anche l'utilizzo di approcci agli elementi discreti (DEM, Leonardi et al., 2019). La definizione di un modello unico (numerico e costitutivo) che permetta di simulare la risposta del materiale sotto ogni condizione è un'operazione complessa, che è stata iniziata ad affrontare solo recentemente in letteratura (Alaei et al, 2021).

Risulta evidente che un modello costitutivo in grado di cogliere le caratteristiche del comportamento meccanico del materiale durante l'intero processo franoso debba essere formulato tenendo conto sia della risposta in fase di innesco che di quella nelle fasi successive. In quest'ottica, per materiali secchi, **Redaelli et al. (2016)** hanno proposto diversi modelli per riprodurre il comportamento meccanico dei terreni basati su un modello in parallelo ispirato dai meccanismi di interazione prevalenti tra i grani: contatti duraturi che danno origine ad una rete di catene di forze (comportamento di tipo solido) e collisioni dissipative tra gli stessi (comportamento collisionale). A seconda dello stato del materiale (in termini di agitazione), la risposta del materiale sarà dominata dall'uno o dall'altro meccanismo. Nel caso di materiale saturo, l'approccio deve tenere conto dei meccanismi di interazione tra la fase liquida e quella granulare (sia in termini di collisioni che di contatti duraturi). In questa nota viene presentata l'estensione dell'approccio costitutivo precedentemente citato (**Vescovi et al. 2020**) in caso materiale saturo e in condizioni stazionarie.

L'approccio per materiale secco e la sua estensione al caso saturo sono presentati al paragrafo §2, mentre nel §3 il modello è validato su risultati numerici DEM e discusso alla luce di questi ultimi.

2. Approccio costitutivo

Il modello qui presentato è basato sulla teoria delle miscele e considera la fase granulare e liquida separatamente, assumendo uno schema parallelo tra le due. In condizioni stazionarie, il contributo granulare, presentato al paragrafo §2.1, è simulato utilizzando un approccio costitutivo in cui il concetto di stato critico per materiali granulari, originariamente formulato in condizioni quasi statiche, viene esteso in condizioni dinamiche per mezzo delle teorie cinetiche dei gas granulari, aggiungendo la temperatura granulare come variabile di stato per il materiale. In condizioni sature, discusse nel paragrafo §2.2, l'accoppiamento tra le due fasi è generato adottando un modello che considera la viscosità del liquido dipendente dell'indice dei vuoti, mentre l'evoluzione della temperatura granulare viene influenzata dalla viscosità molecolare del liquido.

Per semplicità, l'approccio costitutivo è discusso unicamente in condizioni stazionarie di taglio semplice e facendo riferimento ad una miscela ideale monodispersa.

2.1 Contributo granulare: condizioni secche

Per modellare il contributo granulare, si è fatto riferimento all'approccio proposto da **Berzi e Jenkins (2015)**, basato sulle teorie cinetiche dei gas ideali e sul concetto di stato critico per terreni, che utilizza come variabile di stato aggiuntiva (oltre a indice dei vuoti e stato tensionale) la temperatura granulare T , che rappresenta una misura dello stato di agitazione del sistema e la cui evoluzione è governata dal bilancio energetico del sistema, che in condizioni stazionarie di taglio semplice può essere scritto come:

$$\tau_g \dot{\gamma} = \Gamma_g,$$

dove τ_g è la tensione tangenziale relativa alla fase granulare (che nel caso secco coincide con quella totale τ), $\dot{\gamma}$ la velocità di deformazione a taglio e Γ_g l'energia dissipata dalla sola fase granulare.

Si ipotizza che il contributo di sforzo relativo ai grani si possa esprimere adottando un sistema in parallelo come somma di due componenti:

$$\tau_g = \tau_{qs} + \tau_{col},$$

dove τ_{qs} è il termine associato alle catene di sforzo, mentre τ_{col} quello legato ai fenomeni di interazione collisionale tra i grani.

Allo stesso modo, si assume la validità del parallelo anche per i termini di dissipazione:

$$\Gamma_g = \Gamma_{qs} + \Gamma_{col}.$$

Ipotizzando infine che non ci sia flusso di energia tra i due sistemi in parallelo, segue che:

$$\tau_{qs} \dot{\gamma} = \Gamma_{qs}$$

e

$$\tau_{col} \dot{\gamma} = \Gamma_{col}.$$

Il contributo alla tensione tangenziale relativo alla presenza delle catene di forza è definito dalla teoria dello stato critico e può essere espresso come:

$$\tau_{qs} = \sigma_{qs} \tan \phi'_{ss},$$

dove ϕ'_{ss} è l'angolo di attrito del materiale valutato in condizioni di taglio semplice, mentre lo sforzo normale riferito al contributo delle catene di forza σ_{qs} è definito, secondo la teoria dello stato critico, univocamente dall'indice dei vuoti e del materiale:

$$\sigma_{qs} = F_o(e),$$

dove la funzione $F_o(e)$ rappresenta la proiezione del luogo di stato critico nel piano σ_{qs} - e ed è definita in **Vescovi et al 2020**.

Per quanto riguarda il contributo collisionale, a partire dalle teorie cinetiche dei gas granulari (**Berzi e Jenkins, 2015**) si ottiene che:

$$\sigma_{col} = F_1(e, T)T,$$

$$\tau_{col} = F_2(e, T)T^{1/2}\dot{\gamma},$$

e

$$\Gamma_{qs} = F_3(e, T)T^2/\dot{\gamma},$$

dove le funzioni F_i , definite in **Vescovi et al 2020**, dipendono dall'indice dei vuoti e oltre che dallo stato di agitazione del materiale T e considerano la deformabilità dei grani durante la collisione. In particolare, queste funzioni distinguono due diversi andamenti a seconda che l'indice dei vuoti sia inferiore o superiore a e_c , corrispondente a quello critico per $\sigma_{qs} \rightarrow 0$ e $T \rightarrow 0$: per sistemi molto diluiti, la durata della collisione è infatti trascurabile rispetto al tempo di volo, viceversa nel caso di stati densi del materiale.

2.2 Estensione a condizioni sature

L'estensione del modello secco, presentato al paragrafo §2.1, è formulata sulla base della teoria delle miscele, prevedendo dunque un parallelo tra i contributi delle due fasi (solida e liquida):

$$\tau = \tau_g + \tau_l,$$

dove τ_l è la tensione tangenziale relativa alla fase liquida.

Il bilancio di energia, nel caso saturo stazionario e taglio semplice, diventa:

$$\tau_g \dot{\gamma} = \Gamma_g + \Lambda,$$

$$\tau_l \dot{\gamma} = \Gamma_l - \Lambda,$$

dove Γ_l rappresenta l'energia dissipata dalla sola fase liquida, mentre Λ un termine di scambio di energia tra la fase solida e quella liquida.

Per quanto riguarda τ_l , **Vescovi et al. 2020** hanno proposto di considerare una risposta Newtoniana adottando una legge viscosa dipendente dall'indice dei vuoti, per tenere conto degli effetti della presenza dei grani nella miscela:

$$\tau_l = \eta(e) \dot{\gamma}.$$

Il termine di accoppiamento Λ viene definito dagli stessi autori in funzione sia dell'indice dei vuoti che della temperatura granulare T :

$$\Lambda = \frac{54}{d^2} \eta_0 \frac{T}{1+e},$$

dove d rappresenta il diametro dei grani ed η_0 la viscosità intrinseca del liquido considerato.

Mantenendo valida l'ipotesi che $\tau_{qs} \dot{\gamma} = \Gamma_{qs}$, allora la legge di evoluzione della temperatura granulare, in condizioni sature diventa:

$$\tau_{col} \dot{\gamma} = \Gamma_{col} + \Lambda$$

L'equazione appena introdotta rappresenta un termine di accoppiamento tra la componente tensionale granulare (in particolare quella collisionale), che dipende direttamente dalla variabile di stato T , e la presenza del liquido nella miscela. Nel caso in cui $T \rightarrow 0$, ovvero nel caso in cui la risposta del materiale dipenda unicamente dal contributo associato alla presenza delle catene di forza, questo termine di accoppiamento risulta nullo, mentre τ_l diventa trascurabile rispetto a τ_g e si ricade nella formulazione della risposta del materiale secondo il principio degli sforzi efficaci, tipica della meccanica dei terreni.

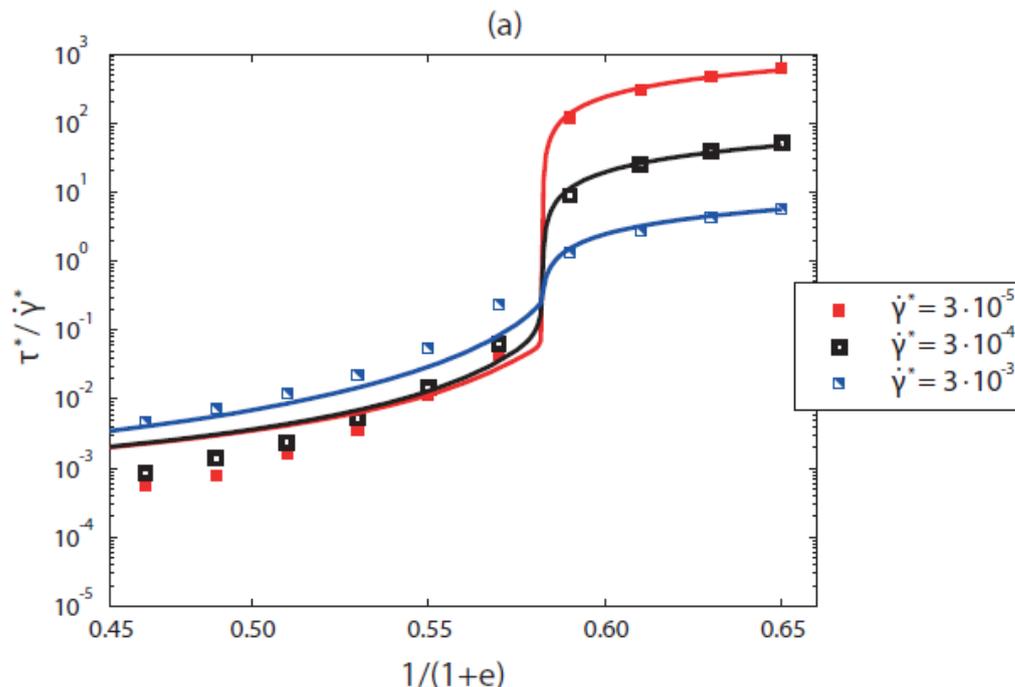
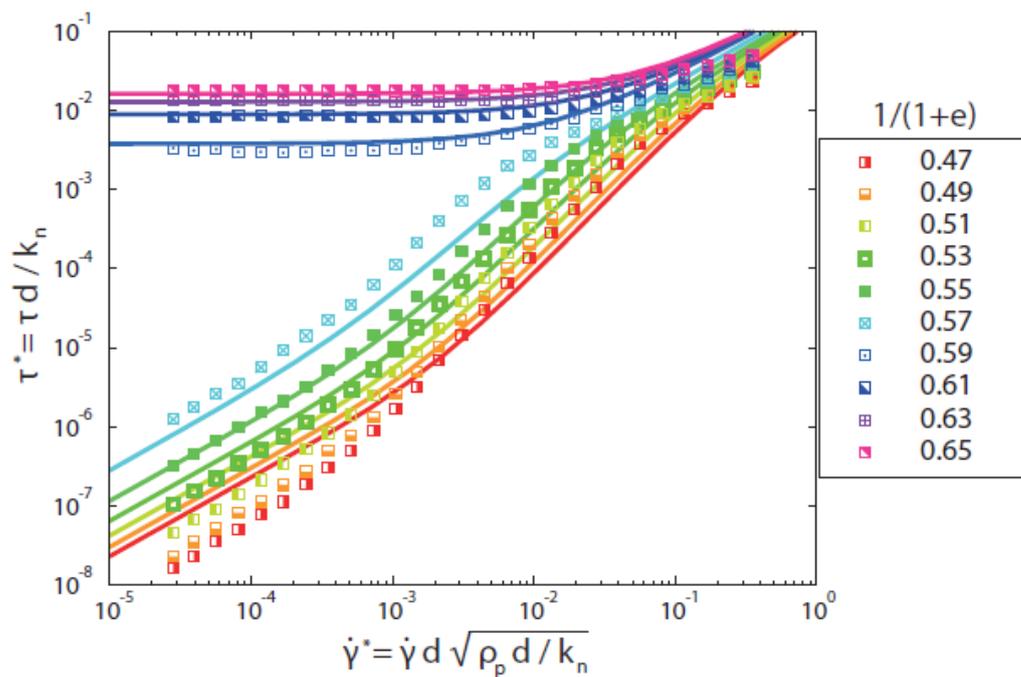


Figura 1. Confronto tra dati numerici (simboli) relativi a flussi granulari saturi e previsioni del modello (linee continue). a) Tensione tangenziale adimensionale rispetto alla velocità di deformazione tangenziale adimensionale per diversi valori di e . (b)

3. Validazione dell'approccio proposto

A causa dell'elevata difficoltà nel ottenere sperimentalmente dati utili alla validazione del modello, l'approccio proposto al paragrafo precedente è qui discusso alla luce dei risultati di prove DEM condotte da **Ness e Sun (2015)**, eseguite su provini di materiale ideale sottoposti a condizioni di taglio semplice, fino a raggiungere stati stazionari ed in cui la presenza dell'acqua viene riprodotta mediante l'inserimento di forze di lubrificazione, che agiscono tra gli elementi anche se questi ultimi non risultano in contatto tra loro. I risultati delle simulazioni DEM sono riportati insieme alle previsioni del modello (calibrato sulla base dei parametri fisici del materiale ideale scelti da **Ness e Sun (2015)**, così come illustrato in **Vescovi et al. 2020**) in Figura 1, in termini adimensionali, così come descritto in didascalia.

Sia dal punto di vista qualitativo che quantitativo, le previsioni teoriche sono in grado di riprodurre i risultati DEM. Facendo riferimento alla Figura 1a, il modello descrive correttamente il passaggio tra i diversi macro-regimi descritti da **Ness e Sun (2015)**. In particolare, se $e > e_c$ il modello è in grado di riprodurre il passaggio dal regime Newtoniano ($\tau \propto \dot{\gamma}$) a quello Bagnoldiano ($\tau \propto \dot{\gamma}^2$), che risultano essere i due regimi principalmente interessati dalla presenza dell'acqua. Confrontando i dati numerici e le previsioni del modello, appaiono comunque alcune discrepanze. Per valori di $\dot{\gamma}^* > 10^{-1}$, il modello sovrastima le sollecitazioni di taglio, mentre, per $\dot{\gamma}^* > 10^{-3}$, nel caso in cui la miscela in esame sia sufficientemente diluita, il modello prevede un'influenza meno pronunciata di e su τ^* . Per quanto riguarda il primo aspetto, **Berzi e Jenkins (2015)** e **Vescovi et al. 2020** hanno osservato che la stessa discrepanza è evidente anche in condizioni asciutte ed è conseguenza di alcune semplificazioni nella modellazione della componente collisionale attraverso le teorie cinetiche dei gas granulari. Per quanto riguarda il secondo, gli autori ritengono che i dati numerici di **Ness e Sun (2015)** nel range di velocità di deformazione tangenziale in questione siano poco precisi, a causa della scelta di modellare l'effetto del liquido solo introducendo forze di lubrificazione equivalenti. Infatti, secondo gli autori, questo approccio non può riprodurre realisticamente la risposta del sistema quando unicamente il liquido governa il comportamento del materiale, cioè per valori sufficientemente alti di e a bassi valori di $\dot{\gamma}^*$. In Figura 1b è riportato il confronto tra le previsioni del modello e i dati numerici di **Ness e Sun (2015)** in termini di viscosità apparente $\tau^*/\dot{\gamma}^*$ rispetto all'indice dei vuoti e per tre diversi valori di $\dot{\gamma}^*$. Il modello è in grado di catturare la risposta del materiale per valori di concentrazione molto vicini a e_c . Tuttavia, anche in questa figura la discrepanza sopra menzionata è evidente per $e > 1$.

4. Osservazioni conclusive

In questa nota, si è discusso un approccio costitutivo formulato per riprodurre il comportamento di mezzi granulari saturi in condizioni di taglio semplice e soggetti a stati stazionari ad alte velocità di deformazione. Il modello è basato sulla teoria delle miscele, che permette di considerare separatamente le due fasi e introdurre un accoppiamento tra la risposta del liquido, di tipo viscoso, e quella del solido, modellata a partire dalla teoria dello stato critico e teorie cinetiche dei gas granulari. Il modello è stato validato rispetto a risultati numerici e discusso criticamente. L'approccio proposto è in grado di riprodurre correttamente il comportamento di materiali granulari soggetti a sollecitazione di taglio semplice in campo stazionario. In particolare: (i) per valori di concentrazione sufficientemente piccoli, la transizione da regime Newtoniano a Bagnoldiano, quando aumenta la velocità di deformazione tangenziale; (ii) l'indipendenza della risposta meccanica, in termini di tensione tangenziale, del comportamento della miscela quando l'indice dei vuoti è sufficientemente basso e il materiale si comporta come un solido.

Bibliografia

- Alaei E., Marks B., Einav I., (2021). A hydrodynamic-plastic formulation for modelling sand using a minimal set of parameters, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 151, 104388, ISSN 0022-5096.
- Berzi, D., & Jenkins, J. T. (2015). Steady shearing flows of deformable, inelastic spheres. *Soft matter*, 11(24), 4799-4808.
- Bingham, E.C. (1916). "An Investigation of the Laws of Plastic Flow". *Bulletin of the Bureau of Standards*. 13 (2): 309–353.
- Cascini, L., Cuomo, S. & Pastor, M. Inception of debris avalanches: remarks on geomechanical modelling. *Landslides* 10, 701–711 (2013).
- Leonardi, A., Goodwin, S.R. & Pirulli, M. The force exerted by granular flows on slit dams. *Acta Geotech.* 14, 1949–1963 (2019).
- Ness, C. & Sun, J. (2015). Flow regime transitions in dense nonbrownian suspensions: Rheology, microstructural characterization and constitutive modeling. *Phys. Rev. E* 91, No. 1, 012201.
- Redaelli, I., Di Prisco, C., & Vescovi, D. (2016). A visco-elasto-plastic model for granular materials under simple shear conditions. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 40(1), 80-104.
- Vo, T.T., Nezamabadi, S., Mutabaruka, P. et al. Additive rheology of complex granular flows. *Nat Commun* 11, 1476 (2020).
- Vescovi, D., Marveggio, P., & Di Prisco, C. G. (2020). Saturated granular flows: constitutive modelling under steady simple shear conditions. *Géotechnique*, 70(7), 608-620.