

ANALISI DEL FLUSSO IN PENDIO INDEFINITO CON MODELLI DI INFILTRAZIONE MONODIMENSIONALE A PIANO DI CAMPAGNA ORIZZONTALE

Diana Bianchi*, Domenico Gallipoli*, Rossella Bovolenta*, Martino Leoni*§
diana.bianchi@edu.unige.it, domenico.gallipoli@unige.it,
rossella.bovolenta@unige.it, martino.leoni@dicca.unige.it

**Dipartimento di Ingegneria Civile, Chimica e Ambientale – Università degli Studi di Genova*
§*WeSI Geotecnica Srl*

Sommario

La presente memoria descrive l'analisi del flusso attraverso un pendio indefinito parzialmente saturo utilizzando modelli di infiltrazione monodimensionale in depositi di terreno con piano campagna orizzontale. La metodologia proposta scompone il flusso in una componente simmetrica e una antisimmetrica, le cui rispettive soluzioni sono combinate per calcolare il regime idraulico effettivo. La risoluzione della componente antisimmetrica è banale e non richiede alcuna integrazione dell'equazione di continuità, mentre la soluzione simmetrica si riduce al caso di flusso monodimensionale attraverso un deposito di terreno con piano campagna orizzontale, per il quale esistono soluzioni ben note. Inoltre, il gradiente del carico piezometrico nella direzione parallela al pendio risulta essere la condizione al contorno di Neumann da imporre alle sezioni perpendicolari al pendio. La definizione rigorosa di questo gradiente consente di superare la necessità di imporre vincoli geometrici e condizioni al contorno restrittive a modelli numerici. Il metodo è applicabile al calcolo dei regimi di infiltrazione in pendii insaturi sia in condizioni stazionarie che transitorie. Infine, si dimostra che l'acqua filtra nel pendio lungo il percorso più breve (ovvero il percorso normale al piano campagna), mentre il flusso parallelo al pendio è interamente alimentato da una sorgente che si trova a una distanza infinita verso monte.

1. Introduzione

Il regime delle pressioni interstiziali nel terreno può essere valutato sia tramite soluzioni analitiche dell'equazione di continuità sia tramite analisi numeriche. La valutazione è più complessa in condizioni insature poiché la permeabilità e il grado di saturazione del terreno dipendono dal valore delle pressioni interstiziali, rendendo il problema non lineare. Nonostante questa difficoltà, soluzioni analitiche rigorose per il problema dell'infiltrazione verticale e orizzontale (monodimensionale) in un terreno a piano campagna orizzontale sono ben note (Huang and Wu, 2012; Lu and Griffiths, 2004; Tracy, 2011). Lo stesso non si può affermare per il flusso bidimensionale in un pendio indefinito (Skempton and DeLory, 1957), il cui regime di pressione interstiziale è stato risolto solo da pochi autori che assumono leggi di permeabilità e curve di ritenzione esponenziali (Iverson, 2000; Lu and Godt, 2008; Travis et al., 2010; Zhan et al., 2013). Tipicamente, il flusso in un pendio indefinito insaturo è valutato tramite modelli numerici che lo schematizzano come una striscia inclinata con rapporto tra lunghezza e spessore maggiore di 20 (Griffiths et al., 2011; Milledge et al., 2012). In questi casi, le condizioni al contorno sulle facce laterali del modello sono tipicamente idrostatiche o impermeabili (el Shamy, 2007). Gli errori introdotti da questa assunzione sono minimizzati valutando il regime di pressioni interstiziali nella sezione in mezzzeria del modello, ovvero la più lontana dalle facce laterali.

La presente memoria illustra una metodologia semplificata (Bianchi et al., 2022) per il calcolo del flusso bidimensionale in un pendio indefinito insaturo tramite la decomposizione del flusso in una componente antisimmetrica e una simmetrica. La componente antisimmetrica è immediatamente risolvibile, senza

necessità di integrare l'equazione di continuità. La componente simmetrica, invece, si riduce al caso di infiltrazione verticale monodimensionale in un terreno con piano campagna orizzontale, per cui esistono soluzioni analitiche. La metodologia proposta ha pratica rilevanza poiché la simmetria del problema permette di valutare il gradiente del carico piezometrico lungo la direzione del pendio, che corrisponde alla condizione al contorno di Neumann da imporre alle facce laterali di un modello numerico semplificato.

2. Metodologia: decomposizione del regime idraulico

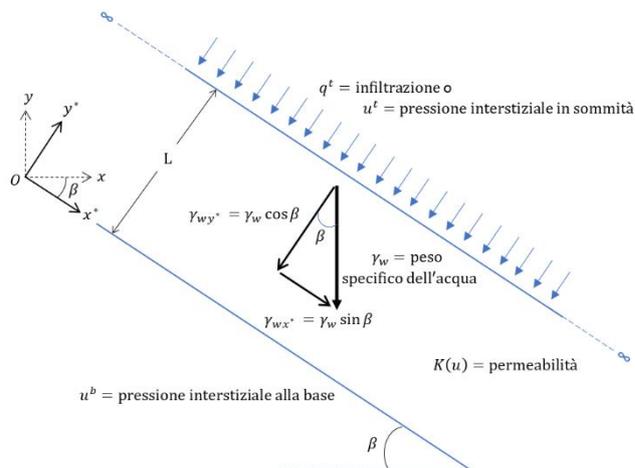


Fig 1. Schematizzazione del pendio indefinito parzialmente saturo.

Il pendio indefinito è sottoposto a una pressione interstiziale costante u^b alla base e a una pressione interstiziale u^t o un flusso di infiltrazione costante q^t alla sommità (perpendicolare al piano campagna).

Il pendio è composto da terreno omogeneo con permeabilità $K(u)$, la quale dipende dalla pressione interstiziale u (assumendo la pressione dell'aria nulla) secondo la seguente legge:

$$K(u) = \kappa_r(u) K^{sat} \quad (1)$$

dove $\kappa_r(u)$ è la permeabilità relativa e K^{sat} è la permeabilità a saturazione. Quest'ultimo parametro è espresso in termini di permeabilità intrinseca κ , peso specifico dell'acqua γ_w e viscosità dinamica μ :

$$K^{sat} = \frac{\kappa \gamma_w}{\mu} \quad (2)$$

In particolare, gli effetti della gravità possono essere scomposti nelle due componenti parallela e perpendicolare al pendio, perciò il peso specifico dell'acqua può essere considerato nelle due componenti parallele agli assi γ_{wx^*} e γ_{wy^*} : questa condizione permette la decomposizione del regime di flusso in due problemi, le cui soluzioni sono unite per trovare la soluzione del regime di flusso complessivo, come spiegato di seguito.

2.1 Componente antisimmetrica del flusso

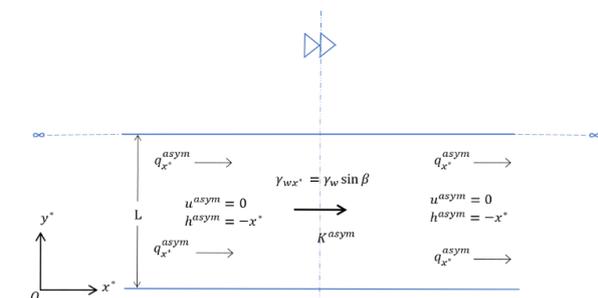


Fig 2. Rappresentazione del problema antisimmetrico.

In Fig. 1, un pendio indefinito parzialmente saturo è schematizzato come un deposito di terreno di lunghezza infinita, spessore costante L (misurato perpendicolarmente al piano campagna) e pendenza β . Il sistema di riferimento considerato (O, x^*, y^*) ha origine alla base del pendio ed è definito dagli assi x^* e y^* , rispettivamente parallelo e perpendicolare al piano campagna. Questo sistema di coordinate è ottenuto dalla rotazione del sistema (O, x, y) di un angolo β : entrambi i sistemi di

La componente antisimmetrica del problema si può schematizzare come un caso di flusso orizzontale in un deposito di terreno con piano campagna orizzontale (Fig. 2). La striscia di terreno si estende infinitamente nella direzione parallela al pendio: perciò, ogni linea perpendicolare ad esso è un asse di antisimmetria. Data la natura antisimmetrica del problema, le pressioni interstiziali sono note a priori e pari a

zero ovunque ($u^{asym} = 0$), perciò non è necessario integrare l'equazione di continuità. Di conseguenza, è possibile valutare il carico piezometrico antisimmetrico h^{asym} , assumendo trascurabile il carico cinetico:

$$h^{asym} = -x^* + \frac{u^{asym}}{\gamma_{wx^*}} = -x^* \quad (3)$$

in cui il segno meno è introdotto poiché la componente antisimmetrica del peso specifico dell'acqua ha la stessa direzione dell'asse x^* .

Le componenti del flusso per il problema antisimmetrico, $q_{x^*}^{asym}$ e $q_{y^*}^{asym}$, sono valutate tramite la legge di Darcy:

$$q_{x^*}^{asym} = -K^{asym}(u) \frac{\partial h^{asym}}{\partial x^*} = K(u) \sin \beta \quad (4a)$$

$$q_{y^*}^{asym} = -K^{asym}(u) \frac{\partial h^{asym}}{\partial y^*} = 0 \quad (4b)$$

La componente antisimmetrica della permeabilità $K^{asym}(u)$ è valutata tenendo conto della componente antisimmetrica del peso specifico dell'acqua nell'Eq. (2), ovvero

$$K^{asym}(u) = \kappa_r(u) K_{sat}^{asym} = \kappa_r(u) \frac{\kappa \gamma_{wx^*}}{\mu} = \kappa_r(u) \frac{\kappa \gamma_w}{\mu} \sin \beta = K(u) \sin \beta \quad (5)$$

2.2 Componente simmetrica del flusso

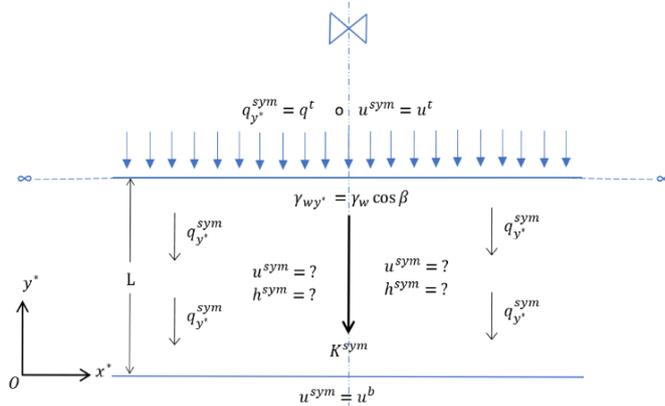


Fig 3. Rappresentazione del problema simmetrico.

Tramite la legge di Darcy e considerando la simmetria del problema, si ottengono le componenti del flusso per il problema simmetrico:

$$q_{x^*}^{sym} = -K^{sym}(u) \frac{\partial h^{sym}}{\partial x^*} = 0 \quad (7a)$$

$$q_{y^*}^{sym} = -K^{sym}(u) \frac{\partial h^{sym}}{\partial y^*} = -K^{sym}(u) \left(1 + \frac{1}{\gamma_w \cos \beta} \frac{\partial u^{sym}}{\partial y^*} \right) \quad (7b)$$

Seguendo la procedura precedentemente impiegata, per definire la componente simmetrica della permeabilità $K^{sym}(u)$ si tiene conto della componente simmetrica del peso specifico dell'acqua nell'Eq. (2) ovvero:

$$K^{sym}(u) = \kappa_r(u) K_{sat}^{sym} = \kappa_r(u) \frac{\kappa \gamma_{wy^*}}{\mu} = \kappa_r(u) \frac{\kappa \gamma_w}{\mu} \cos \beta = K(u) \cos \beta \quad (8)$$

La componente simmetrica della permeabilità $K^{sym}(u)$ è una proprietà del materiale e quindi dipende dal campo delle pressioni interstiziali. Inoltre, anche la componente del flusso $q_{y^*}^{sym}$ dipende dal campo di pressioni interstiziali simmetriche. Il problema di Fig. 3 si riduce, dunque, a un semplice caso di infiltrazione verticale monodimensionale, in cui si considerano i valori γ_{wy^*} e $K^{sym}(u)$.

2.3 Combinazione delle soluzioni antisimmetrica e simmetrica

Dopo aver studiato le componenti di flusso del problema, esse vengono combinate in modo tale da ottenere il regime idraulico effettivo nel pendio indefinito. A tale scopo, si osserva che le componenti del flusso lungo x^* e y^* coincidono rispettivamente con la componente antisimmetrica e simmetrica del problema, in particolare risulta

$$q_{x^*} = q_{x^*}^{asym} = K(u) \sin \beta \quad (9a)$$

$$q_{y^*} = q_{y^*}^{sym} = -K(u) \cos \beta \left(1 + \frac{1}{\gamma_w \cos \beta} \frac{\partial u^{sym}}{\partial y^*} \right) \quad (9b)$$

La legge di Darcy permette di valutare le componenti di flusso q_{x^*} e q_{y^*} in termini del gradiente del carico piezometrico effettivo h . Confrontando tali definizioni con le Eq. (9a) e (9b), si ottengono le componenti del gradiente del carico piezometrico nelle direzioni parallela e perpendicolare al pendio:

$$\frac{\partial h}{\partial x^*} = -\sin \beta \quad (10a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y^*} = \cos \beta + \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u^{sym}}{\partial y^*} \quad (10b)$$

In particolare, l'Eq. (10a) corrisponde alla condizione al contorno di Neumann da applicare a tutte le sezioni perpendicolari al pendio, che, se espressa in funzione della pressione interstiziale, risulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x^*} = 0 \quad (11)$$

Dal momento che u^{sym} dipende solo dalla coordinata y^* , il carico piezometrico effettivo h può essere valutato dalla somma dei risultati dell'integrazione delle Eq. (10a) e (10b):

$$h = -\sin \beta x^* + \cos \beta y^* + \frac{u^{sym}}{\gamma_w} \quad (12)$$

Inoltre, considerando che vale,

$$y = -\sin \beta x^* + \cos \beta y^* \quad (13)$$

si deduce che la pressione interstiziale effettiva coincide con il campo di pressioni del problema simmetrico, ovvero:

$$u = \gamma_w (h - y) = \gamma_w \left(-\sin \beta x^* + \cos \beta y^* + \frac{u^{sym}}{\gamma_w} + \sin \beta x^* - \cos \beta y^* \right) = u^{sym} \quad (14)$$

3. Convalida

La metodologia proposta è applicata per l'analisi del flusso stazionario in un pendio indefinito parzialmente saturo. La soluzione analitica di Lu e Griffiths (2004) considera il caso di infiltrazione verticale in un deposito orizzontale di spessore costante, la cui permeabilità relativa diminuisce con legge esponenziale al diminuire del valore delle pressioni interstiziali

$$K(u) = \kappa_r(u) K^{sat} = e^{\alpha u} K^{sat} \quad (15)$$

in cui α è il parametro che governa la velocità con cui diminuisce la permeabilità. La soluzione di Lu e Griffiths (2004) considera come condizioni al contorno un valore di pressione interstiziale pari a 0 alla base del deposito di terreno e un flusso di infiltrazione costante al piano campagna orizzontale. Tuttavia, la soluzione può essere riformulata in modo più generale, per tenere conto di diverse condizioni al contorno. Infatti, integrando la legge di continuità per il caso stazionario, si ottengono due soluzioni analitiche differenti:

$$u = \frac{1}{\alpha} \ln \left(e^{-\alpha \gamma_w y^*} \left(e^{\alpha u^b} + \frac{q^t}{K^{sat}} \right) - \frac{q^t}{K^{sat}} \right) \quad (16a)$$

$$u = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1 - e^{\alpha \gamma_w (L - y^*)} \left(1 - e^{\alpha (u^t - u^b)} \right) - e^{\alpha (\gamma_w L + u^t - u^b)}}{1 - e^{\alpha \gamma_w L}} + u^b \quad (16b)$$

Nel caso di pendio indefinito, grazie alla decomposizione proposta, il campo di pressioni interstiziali può essere calcolato sostituendo i valori di γ_{wy}^* e $K^{sym}(u)$ nelle Eq. (16a) e (16b):

$$u = \frac{1}{\alpha} \ln \left(e^{-\alpha \gamma_w \cos \beta y^*} \left(e^{\alpha u^b} + \frac{q^t}{K^{sat} \cos \beta} \right) - \frac{q^t}{K^{sat} \cos \beta} \right) \quad (17a)$$

$$u = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1 - e^{\alpha \gamma_w \cos \beta (L - y^*)} \left(1 - e^{\alpha (u^t - u^b)} \right) - e^{\alpha (\gamma_w \cos \beta L + u^t - u^b)}}{1 - e^{\alpha \gamma_w \cos \beta L}} + u^b \quad (17b)$$

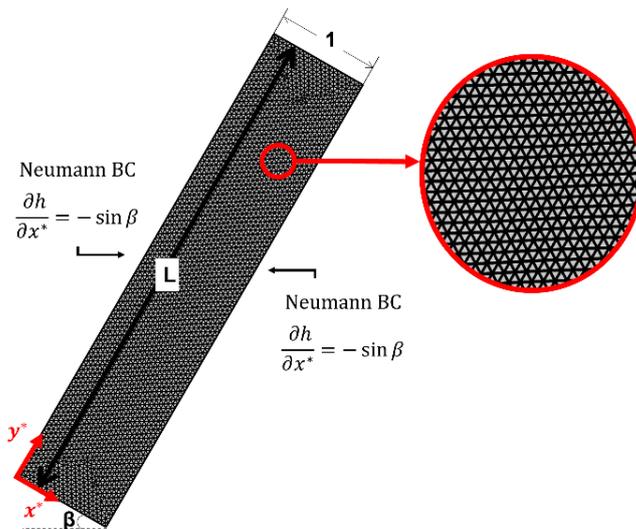


Fig. 4. Modello di pendio indefinito in Comsol Multiphysics.

I parametri utilizzati sono i seguenti:
 $L = 5m$, $\beta = 30^\circ$, $K^{sat} = 3 * 10^{-6} m/s$, $\alpha = 0,1 kPa^{-1}$, $\gamma_w = 10kN/m^3$. Il modello è stato testato per due set di condizioni al contorno: pressione interstiziale costante sia alla base ($u^b = 0 kPa$) sia alla sommità della striscia di terreno ($u^t = -100 kPa$ e $u^t = -50 kPa$), pressione interstiziale fissata alla base ($u^b = 0 kPa$) e flusso alla sommità ($q^t = -10^{-7} \frac{m}{s}$ e $q^t = -10^{-6} \frac{m}{s}$).

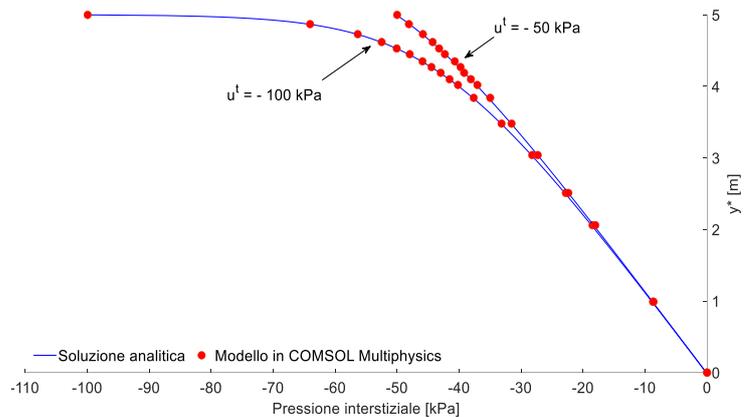


Fig. 5. Confronto tra la soluzione analitica proposta e il modello in Comsol Multiphysics: pressione interstiziale costante alla base e in sommità.

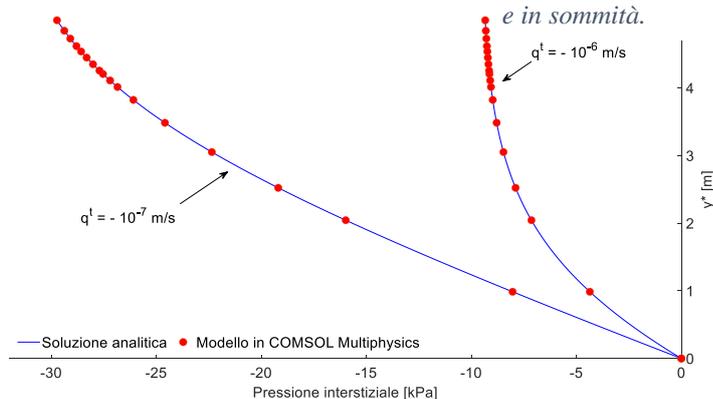


Fig. 6. Confronto tra la soluzione analitica proposta e il modello in Comsol Multiphysics: flusso in sommità e pressione interstiziale costante alla base.

Per convalidare la metodologia, le pressioni interstiziali calcolate con la soluzione analitica sono state confrontate con quelle risultanti da un modello numerico di pendio indefinito (utilizzando il software agli elementi finiti Plaxis), a cui sono state applicate le tipiche condizioni al contorno di impermeabilità alle facce perpendicolari al pendio. Inoltre, come mostrato in Fig. 4, è stata modellata una striscia di pendio di larghezza unitaria tramite il software agli elementi finiti Comsol Multiphysics, a cui è stata applicata la condizione al contorno di Neumann (Eq. 10a) alle facce laterali.

Le Fig. 5 e Fig. 6 mostrano la perfetta coincidenza tra la soluzione analitica e il modello ridotto analizzato con Comsol Multiphysics: ciò conferma la bontà della soluzione analitica ottenuta tramite la decomposizione del flusso e la validità della condizione di Neumann trovata nelle sezioni precedenti. Quest'ultima può essere applicata ad un modello numerico ridotto per riprodurre il regime di flusso di un pendio indefinito parzialmente saturo, superando le difficoltà legate alle scelte

della lunghezza del modello numerico e delle condizioni al contorno da applicare alle facce laterali perpendicolari al pendio.

4. Conclusioni

Nella presente memoria è stata descritta una nuova metodologia per l'analisi del flusso in un pendio indefinito parzialmente saturo, che utilizza modelli di infiltrazione monodimensionale in depositi di terreno con piano campagna orizzontale e scompone il flusso nel pendio in una componente simmetrica e una antisimmetrica, le cui rispettive soluzioni sono combinate per calcolare il regime idraulico effettivo. Tramite questa metodologia sono state ottenute la soluzione analitica per il regime delle pressioni interstiziali e la condizione di Neumann da applicare ad un modello numerico ridotto: la validità di entrambe è stata testata tramite confronti con Plaxis e Comsol Multiphysics. È importante sottolineare che per brevità, è stata proposta la convalida della metodologia per il caso di flusso stazionario con una legge di permeabilità esponenziale. Tuttavia, l'approccio è generalizzabile a casi transitori, con leggi di ritenzione sia reversibili, sia isteretiche.

Dal problema antisimmetrico è evidente che la componente del flusso nella direzione parallela al pendio è interamente generata da una sorgente a monte localizzata ad una distanza infinita, senza contributi di infiltrazione superficiale. Al contrario, la componente di flusso nella direzione perpendicolare al pendio è interamente generata dall'infiltrazione superficiale. Dunque, l'acqua infiltrante attraversa il pendio lungo la via più breve, ovvero il suo percorso è perpendicolare al piano campagna.

Bibliografia

- Bianchi D., Gallipoli D., Bovolenta R., Leoni M. (2022). "Analysis of unsaturated seepage in infinite slopes by means of horizontal ground infiltration models", *Géotechnique (in press)*.
- el Shamy U. (2007). "Numerical Study of Rainfall Infiltration in Unsaturated Slopes", *Embankments, Dams, and Slopes*, pp. 1–10.
- Griffiths D. v., Huang J., deWolfe, G.F. (2011). "Numerical and analytical observations on long and infinite slopes", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 35, 569–585.
- Huang R.Q., Wu L.Z. (2012). "Analytical solutions to 1-D horizontal and vertical water infiltration in saturated/unsaturated soils considering time-varying rainfall", *Computers and Geotechnics*, 39, 66–72.
- Iverson R.M. (2000). "Landslide triggering by rain infiltration", *Water Resources Research*, 36, 1897–1910.
- Lu N., Godt J. (2008). "Infinite slope stability under steady unsaturated seepage conditions", *Water Resources Research*, 44.
- Lu N., Griffiths D. v. (2004). "Profiles of Steady-State Suction Stress in Unsaturated Soils", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 130, 1063–1076.
- Milledge D.G., Griffiths D. v., Lane S.N., Warburton J. (2012). "Limits on the validity of infinite length assumptions for modelling shallow landslides", *Earth Surface Processes and Landforms*, 37, 1158–1166.
- Skempton A.W., DeLory F.A. (1957). "Stability of Natural Slopes in London Clay". Proc., 4th Int.Conf. Soil Mech. Found. Eng. 2, London, pp. 378–381.
- Tracy T.F. (2011). "Analytical and Numerical Solutions of Richards' Equation with Discussions on Relative Hydraulic Conductivity", *Hydraulic Conductivity - Issues, Determination and Applications*. InTech.
- Travis Q.B., Houston S.L., Marinho F.A.M., Schmeeckle M. (2010). "Unsaturated Infinite Slope Stability Considering Surface Flux Conditions", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 136, 963–974.
- Zhan T.L.T., Jia G.W., Chen Y.-M., Fredlund D.G., Li H. (2013). "An analytical solution for rainfall infiltration into an unsaturated infinite slope and its application to slope stability analysis", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37, 1737–1760.