

# SANICLAY-T: UN APPROCCIO TERMODINAMICO ALLA MODELLAZIONE COSTITUTIVA DEI TERRENI ARGILLOSI

Fabio Rollo

*Sapienza Università di Roma*  
*fabio.rollo@uniroma1.it*

Angelo Amorosi

*Sapienza Università di Roma*  
*angelo.amorosi@uniroma1.it*

## Sommario

La risposta reversibile dei terreni che emerge dall'applicazione di perturbazioni esterne che impegnano il materiale per piccoli livelli di deformazione dipende spesso dai processi dissipativi plastici subiti nella precedente storia di carico: questo aspetto è comunemente indicato come accoppiamento elasto-plastico. Questo fenomeno viene qui esaminato attraverso una modellazione costitutiva su base termodinamica. Nell'ambito della teoria dell'iperplasticità, viene proposta una nuova formulazione che considera due leggi di incrudimento isotropo e rotazionale volte a illustrare due forme di accoppiamento elasto-plastico isotropo e anisotropo per argille. L'approccio termodinamico permette di evidenziare in maggior dettaglio alcune specificità del fenomeno rispetto a quanto convenzionalmente derivato dalla teoria dell'elastoplasticità, con particolare riferimento agli effetti dell'accoppiamento sulla superficie di snervamento nello spazio delle tensioni di Cauchy e alla conseguente legge di flusso non associata. La capacità predittiva del modello è illustrata con riferimento ad una serie di simulazioni numeriche di prove di laboratorio reali ed ideali su argille ricostituite.

## 1. Introduzione

Numerose evidenze sperimentali mostrano che le deformazioni plastiche possono influenzare fortemente la risposta reversibile di molti materiali quali terre, rocce e calcestruzzo: questo fenomeno è comunemente indicato come accoppiamento elastoplastico. Ad esempio, nelle argille la rigidità elastica è influenzata dalla storia pregressa del materiale attraverso il grado di sovraconsolidazione ([Rampello et al., 1997](#)) e l'anisotropia della rigidità a piccole deformazioni evolve durante il processo di carico in virtù di una modifica permanente della struttura interna controllata dal verificarsi di deformazioni permanenti di natura plastica ([Mitaritonna et al., 2014](#)).

Negli ultimi decenni sono stati sviluppati diversi modelli costitutivi per riprodurre diverse forme di accoppiamento elasto-plastico ispirati alle osservazioni sperimentali su terreni e rocce. In sostanza, nell'ambito dell'elasto-plasticità classica, la dipendenza della formulazione elastica dalle deformazioni plastiche o da una serie di variabili interne, la cui evoluzione è controllata dai processi plastici, introduce una forma di accoppiamento in grado di simulare il comportamento osservato a piccole deformazioni. In questa prospettiva, vale la pena citare i lavori pionieristici di [Dafalias \(1977a,b\)](#) e [Maier & Hueckel \(1979\)](#), volti principalmente a riprodurre il tipo di accoppiamento elasto-plastico osservato in campioni di roccia sottoposti a compressione uniassiale. Sebbene basati su premesse diverse, questi lavori sono stati i primi a dedurre le implicazioni dell'accoppiamento elasto-plastico sulla legge di flusso: infatti, se si assume l'incremento di deformazione plastica normale alla funzione

potenziale plastico, non lo sarà di conseguenza l'incremento di deformazione irreversibile. Lungo questo percorso sono stati proposti diversi modelli costitutivi con l'adozione di formulazioni ipoelastiche e iperelastiche (Houlsby et al., 2005; Gajo & Bigoni, 2008; Zhao & Gao, 2015). Inoltre Hueckel & Tutumluer (1994) e più recentemente Amorosi et al. (2021) hanno introdotto una forma di accoppiamento elasto-plastico anisotropo che lega due tensori di struttura che descrivono l'anisotropia elastica e plastica delle argille. Tuttavia, i modelli sviluppati nell'ambito dell'elasto-plasticità classica non consentono di esplorare a fondo le conseguenze dell'accoppiamento elastoplastico sulla risposta complessiva del materiale, poiché riescono a descrivere solo l'influenza del regime plastico sul quello elastico trascurando la mutua interazione. Alla luce di ciò è possibile ottenere una forma più sofisticata di accoppiamento elasto-plastico adottando un approccio costitutivo termodinamico. Un possibile quadro teorico di riferimento è quello della termodinamica con variabili interne, originariamente proposto da Maugin (1992) e poi specializzato ai geomateriali da Houlsby & Puzrin (2006) sotto il nome di iperplasticità. Questo approccio permette di esplorare le implicazioni dell'accoppiamento elasto-plastico sulla risposta plastica in modo termodinamicamente corretto attraverso la definizione di due funzioni scalari: la funzione di energia e la funzione di dissipazione.

Lo scopo principale di questo lavoro è quello di sviluppare un modello iperelasto-plastico per argille caratterizzato da diverse forme di accoppiamento elasto-plastico, in grado di riprodurre alcuni dei comportamenti meccanici sopra menzionati. In dettaglio, viene proposta una nuova formulazione, tenendo conto della dipendenza della rigidità elastica dalla storia di carico vissuta dal materiale e, in relazione a ciò, dell'anisotropia elastica iniziale e della sua successiva evoluzione. A questo scopo, la formulazione iperelastica anisotropa non lineare proposta da Amorosi et al. (2020) è combinata con il modello a singola superficie SANICLAY-T (Rollo & Amorosi, 2020) in cui l'anisotropia plastica e la sua evoluzione è legata all'orientamento della superficie di snervamento controllato da una legge di incrudimento rotazionale (Dafalias & Taiebat, 2013). In questo modo la dipendenza dell'energia elastica dalle variabili interne produce una forma di accoppiamento elasto-plastico caratterizzato da una reciproca influenza tra il comportamento elastico e quello plastico. Ciò comporta notevoli conseguenze sulla forma della superficie di snervamento e sulla legge di flusso, qui analizzate con riferimento ai risultati di una serie di simulazioni numeriche.

## 2. Accoppiamento elasto-plastico su base termodinamica

L'accoppiamento isotropo viene presentato con riferimento al modello SANICLAY-T scalato per semplicità al Cam clay modificato (MCC), impiegando la pressione di preconsolidazione come variabile interna, mentre l'accoppiamento anisotropo è presentato con riferimento al modello SANICLAY-T attraverso una dipendenza dalla variabile interna di incrudimento rotazionale dalla funzione di energia elastica.

### 2.1 Accoppiamento isotropo

L'accoppiamento isotropo viene introdotto attraverso una modifica della formulazione iperelastica non lineare proposta da Houlsby et al. (2005) tenendo conto della variabile scalare  $p_c$ , che porta alla seguente funzione di energia, qui presentata in forma triassiale:

$$\varphi(\varepsilon_v^e, \varepsilon_s^e, p_c) = \left( \frac{p_r}{p_c} \right)^{\frac{r}{n-1}} \frac{p_r}{k(2-n)} k^{\frac{2-n}{1-n}} (1-n)^{\frac{2-n}{1-n}} \left[ \varepsilon_v^{e2} + \frac{3g}{k(1-n)} \varepsilon_s^{e2} \right]^{\frac{2-n}{2-2n}} \quad (1)$$

dove  $p_r$  indica la pressione di riferimento e  $n$ ,  $k$  e  $g$  sono i parametri elastici. Nell'Eq. (1) si introduce una dipendenza dell'energia libera elastica dalla variabile interna scalare  $p_c$ , il cui effetto è controllato dal parametro  $r$  che svolge il ruolo di esponente della relazione empirica proposta da Rampello et al. (1997). Quando  $r=0$  si riottiene la formulazione disaccoppiata.

L'altro ingrediente chiave è la funzione di dissipazione, espressa come:

$$\dot{d}(\dot{\varepsilon}_v^p, \dot{\varepsilon}_s^p, p_c, \dot{p}_c) = \frac{P_c}{2} \left( \sqrt{\dot{\varepsilon}_v^{p2} + M^2 \dot{\varepsilon}_s^{p2}} + \dot{\varepsilon}_v^p \right) + \Lambda_1 \left( \dot{p}_c - \frac{P_c}{\lambda^*} \dot{\varepsilon}_v^p \right) \quad (2)$$

che dipende dagli incrementi di deformazione volumetrica e deviatorica plastica, con  $M$  che rappresenta lo rapporto delle tensioni a stato critico. Il secondo termine funge da vincolo che tiene conto dell'incrudimento isotropo del modello, con lo scalare  $\Lambda_1$  che rappresenta un moltiplicatore lagrangiano e  $\lambda^*$  un parametro del modello che controlla la legge di incrudimento. La dissipazione è una funzione omogenea del primo ordine negli incrementi di deformazione plastica, come previsto per i materiali il cui comportamento è indipendente dalla velocità di applicazione delle perturbazioni. Sebbene il vincolo non contribuisca alla quantità di energia dissipata in quanto numericamente sempre uguale a zero, introduce esplicitamente il ruolo dell'evoluzione della variabile interna nella dissipazione. Dall'Eq. (2) è possibile determinare la funzione di snervamento nello spazio delle tensioni di Cauchy, qui espressa attraverso gli invarianti di tensione  $p$  e  $q$ :

$$\hat{f}(p, q, p_c) = q^2 + M^2 \left\{ p - r \left( \frac{p_r}{p_c} \right)^r \frac{1}{\lambda^* p_r^{1-n} k (1-n) (2-n)} \left[ p^2 + \frac{k(1-n)}{3g} q^2 \right]^{\frac{2-n}{2}} \right\} \quad (3)$$

$$\left\{ p - r \left( \frac{p_r}{p_c} \right)^r \frac{1}{\lambda^* p_r^{1-n} k (1-n) (2-n)} \left[ p^2 + \frac{k(1-n)}{3g} q^2 \right]^{\frac{2-n}{2}} - p_c \right\} = 0$$

che è diversa dall'ellisse del MCC. La legge di flusso non associata e la diversa forma della funzione di snervamento nello spazio delle tensioni di Cauchy sono una naturale conseguenza dell'accoppiamento elastoplastico.

### 2.1 Accoppiamento anisotropo

Per portare in conto il carattere anisotropo dei terreni si adotta nel seguito la funzione di energia proposta da Amorosi et al. (2020), in cui l'anisotropia elastica è descritta da un tensore simmetrico del secondo ordine  $\mathbf{B}$ , chiamato tensore di struttura. Al contempo, l'anisotropia plastica è descritta nel modello SANICLAY-T dal tensore deviatorico del secondo ordine  $\boldsymbol{\beta}$  che governa la distorsione della superficie di snervamento e la sua evoluzione con i processi di deformazione plastica. Una possibile strategia per introdurre una forma di accoppiamento elasto-plastico anisotropo consiste nel legare questi due tensori attraverso la relazione  $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \omega \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}$  proposta da Amorosi et al. (2021), dove  $\mathbf{I}$  indica il tensore identità,  $\beta$  rappresenta la controparte scalare del tensore  $\boldsymbol{\beta}$  e  $\omega$  è un parametro del modello. Per ridurre la complessità analitica ma al contempo evidenziare le caratteristiche principali della formulazione accoppiata su base termodinamica, si adotta una versione lineare del modello elastico, caratterizzato dalla seguente forma di energia quadratica:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\beta}) = \frac{P_r}{2} \left\{ \left( k - \frac{2}{3} g \right) \left[ \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e - \omega \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\varepsilon}^e) \right]^2 + 2g \text{tr} \left[ (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \omega \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 \right] \right\} \quad (4)$$

Per  $\omega=0$  non sussiste più la relazione tra i due tensori di struttura e quindi il modello torna a essere disaccoppiato. Inoltre, l'espressione della funzione di dissipazione ha la forma:

$$\begin{aligned} \dot{d}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}, p_c) = & \frac{p_c}{2} \left[ \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p + \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'^p)^2 + \frac{2}{3}(M^2 - \beta^2)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'^p} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p + \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'^p \right] + \\ & + \boldsymbol{\Lambda}_2 : \left[ \dot{\boldsymbol{\beta}} - c(\boldsymbol{\beta}_b - \boldsymbol{\beta}) \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p + \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'^p)^2 + \frac{2}{3}(M^2 - \beta^2)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'^p} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

dove il primo termine rappresenta la funzione di dissipazione del modello SANICLAY-T mentre il secondo termine rappresenta un vincolo aggiuntivo introdotto tramite il moltiplicatore lagrangiano a carattere tensoriale  $\boldsymbol{\Lambda}_2$ . L'espressione all'interno del vincolo rappresenta la legge di incrudimento rotazionale del modello, dove  $c$  è un parametro del modello che controlla la velocità dell'evoluzione e  $\boldsymbol{\beta}_b$  rappresenta il valore di equilibrio funzione dello rapporto di sforzo  $\eta$  corrente, per il quale sono disponibili diverse espressioni (Dafalias & Taiebat, 2013).

In comune con l'accoppiamento isotropo presentato nella sezione precedente, la formulazione termodinamica porta a (i) una funzione di snervamento che mostra forme diverse nello spazio delle sollecitazioni rispetto a quelle del modello SANICLAY-T e (ii) una plasticità non associata. Tuttavia, l'accoppiamento elasto-plastico introdotto dal tensore di struttura agisce sul carattere direzionale dei terreni e, a differenza di quello isotropo, la sua intensità dipende dal valore attuale della variabile di indurimento rotazionale. Infatti l'accoppiamento elasto-plastico svanisce quando il modello diventa isotropo o quando la variabile rotazionale raggiunge il valore asintotico. Ciò significa che, a differenza dell'accoppiamento isotropo, quello anisotropo non agisce in modo permanente, in quanto è presente solo finché la variabile rotazionale evolve durante il processo dissipativo.

### 3. Risposta del modello

Per evidenziare gli effetti dell'accoppiamento isotropo sulla risposta del modello, la Fig.1 mostra i risultati di una serie di prove triassiali non drenate ideali effettuate a partire da diversi gradi di sovraconsolidazione, considerando per semplicità l'elasticità lineare. L'accoppiamento modifica non solo la forma e la dimensione della superficie di snervamento iniziale a parità di  $p_c$  ma anche la legge di flusso. Inoltre  $p_c$  gioca un ruolo rilevante sui valori delle rigidezze elastiche, come si può notare dalle curve sforzi-deformazioni.

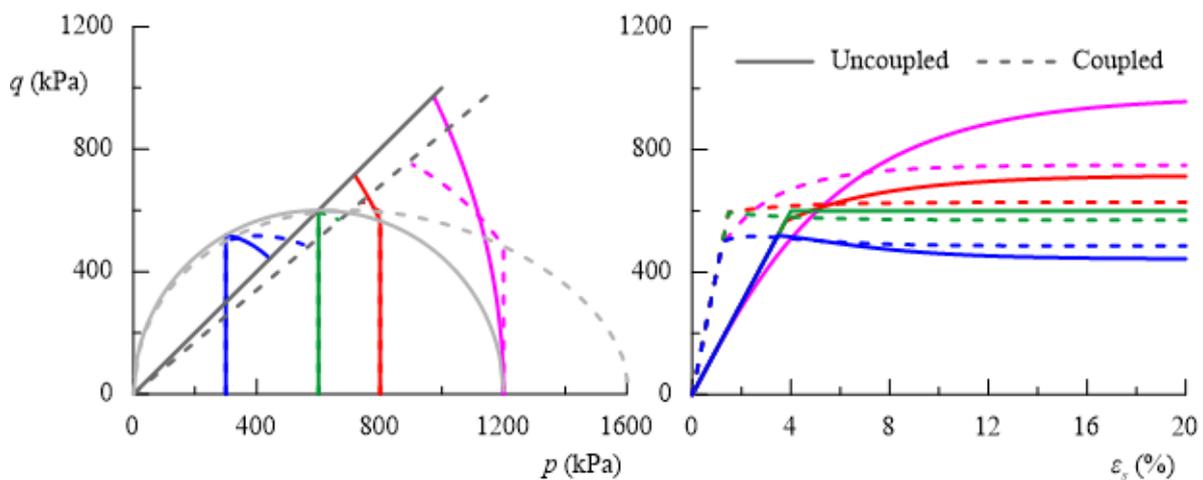


Fig 1. Simulazione di prove triassiali non drenate: confronto tra modello accoppiato e non accoppiato

Inoltre la formulazione accoppiata migliora la capacità del modello di riprodurre la dipendenza della rigidezza a taglio elastica con il grado di sovraconsolidazione, come mostrato in Fig.2. Infatti, la formulazione proposta non solo simula la dipendenza non lineare della rigidezza elastica dallo stato

tensionale corrente ma tiene anche in conto di diversi valori del modulo di taglio a stato tensionale costante in relazione al valore corrente della pressione di preconsolidazione, la cui evoluzione è regolata dagli incrementi di deformazione volumetrica plastica. La procedura di calibrazione dei parametri del modello e una sintesi degli stessi sono riportate in [Rollo & Amorosi \(2022\)](#).

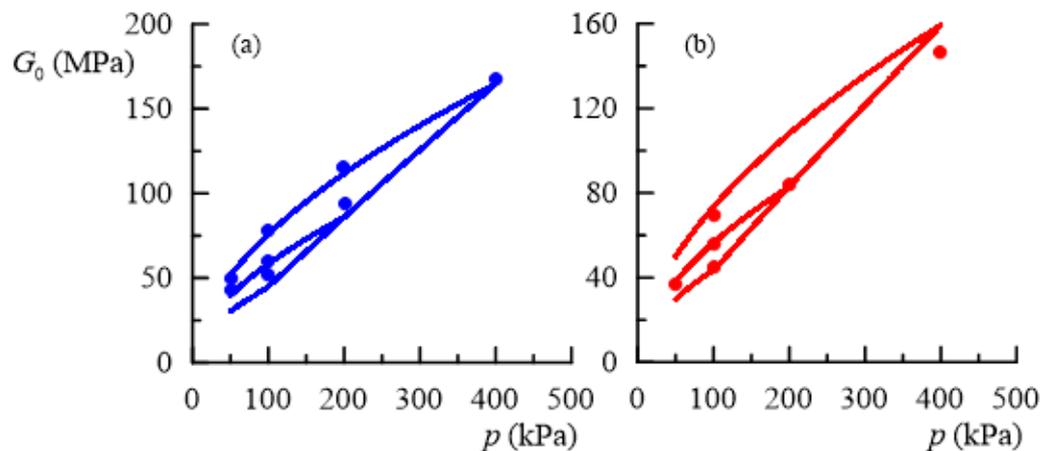


Fig 2. Confronto tra simulazioni e dati sperimentali (Rampello et al. 1997) per (a)  $\eta=0.7$  e (b)  $\eta=0.5$

Per quanto riguarda l'accoppiamento anisotropo, la Fig. 3 mostra la superficie di snervamento del modello per  $\beta=0.6$  nel piano meridiano normalizzato, considerando o meno l'accoppiamento. Le frecce nere definiscono la direzione degli incrementi di deformazione plastica. Appare chiaramente come l'accoppiamento non solo modifica la forma della superficie ma modifica anche la legge di flusso rendendola non associata.

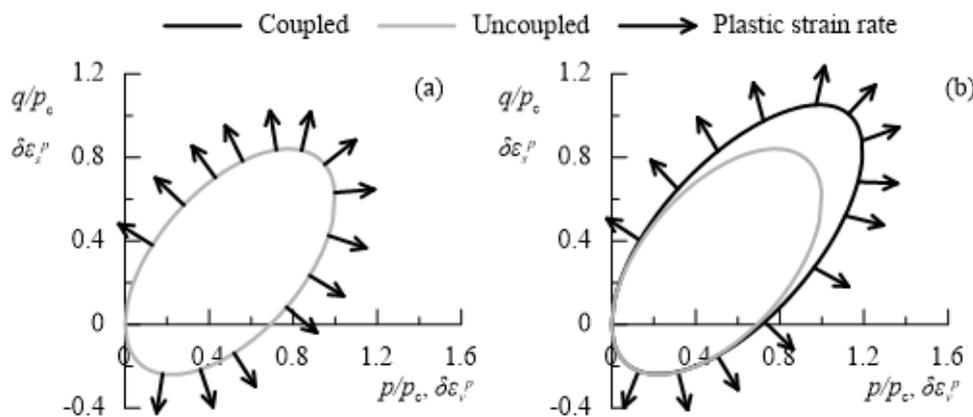


Fig 3. Superfici di snervamento nel piano meridiano per (a)  $\omega=0$  e (b)  $\omega=1$

Infine, la Fig. 4 confronta i valori osservati e simulati del rapporto tra le rigidzze a taglio  $G_{hh}/G_{hv}$  per l'argilla ricostituita di Lucera ([Mitaritonna et al., 2014](#)). Il valore iniziale della variabile di incrudimento rotazionale è ottenuto per condizioni  $K_0$  mentre i parametri e la procedura di calibrazione sono discussi in dettaglio in [Rollo & Amorosi \(2022\)](#). I parametri del modello sono stati calibrati per predire i valori di equilibrio di  $G_{hh}/G_{hv}$ , mentre il parametro  $c$  controlla la velocità di evoluzione durante il processo di caricamento. La risposta complessiva simulata riproduce in modo soddisfacente i dati sperimentali e soprattutto riesce a tenere conto del carattere evolutivo delle proprietà direzionali del materiale.

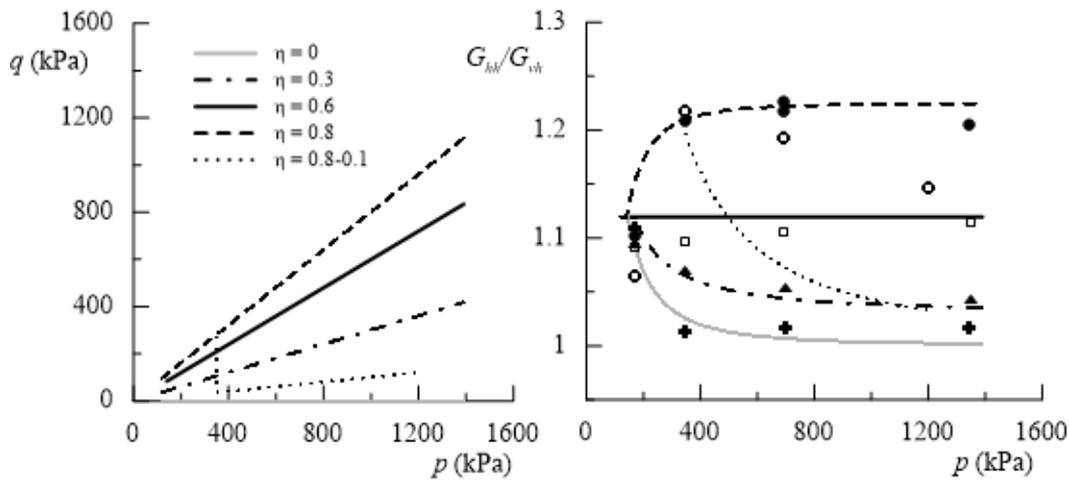


Fig 4. Evoluzione del rapporto di anisotropia: simulazioni vs dati sperimentali

### Bibliografia

- Amorosi, A., Rollo, F., & Houlsby, G. T. (2020). A nonlinear anisotropic hyperelastic formulation for granular materials: comparison with existing models and validation. *Acta Geotechnica*, 15(1), 179-196.
- Amorosi, A., Rollo, F., & Dafalias, Y. F. (2021). Relating elastic and plastic fabric anisotropy of clays. *Géotechnique*, 71(7), 583-593.
- Dafalias, Y. F. (1977a). Il'iusin's postulate and resulting thermodynamic conditions on elasto-plastic coupling. *International Journal of Solids and Structures*, 13(3), 239-251.
- Dafalias, Y. F. (1977b). Elasto-plastic coupling within a thermodynamic strain space formulation of plasticity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 12(5), 327-337.
- Dafalias, Y. F., & Taiebat, M. (2013). Anatomy of rotational hardening in clay plasticity. *Géotechnique*, 63(16), 1406-1418.
- Gajo, A., & Bigoni, D. (2008). A model for stress and plastic strain induced nonlinear, hyperelastic anisotropy in soils. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 32(7), 833-861.
- Houlsby, G.T., Amorosi, A., & Rojas, E. (2005). Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation. *Géotechnique* 55 (5), 383-392.
- Houlsby, G. T., & Puzrin, A. M. (2006). *Principles of hyperplasticity*. Springer - Verlag London Limited.
- Hueckel, T., & Tutumluer, E. (1994). Modeling of elastic anisotropy due to one-dimensional plastic consolidation of clays. *Computers and Geotechnics* 16, No. 4, 311-349.
- Maier, G., & Hueckel, T. (1979, April). Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials. In *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* (Vol. 16, No. 2, pp. 77-92). Pergamon.
- Maugin, G. A. (1992). *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Mitaritonna, G., Amorosi, A., & Cotecchia, F. (2014). Experimental investigation of the evolution of elastic stiffness anisotropy in a clayey soil. *Géotechnique* 64, No. 6, 463-475.
- Rampello, S., Viggiani, G. M. B., & Amorosi, A. (1997). Small-strain stiffness of reconstituted clay compressed along constant triaxial effective stress ratio paths. *Géotechnique* 47, No. 3, 475-489.
- Rollo, F., & Amorosi, A. (2020). SANICLAY-T: Simple thermodynamic-based anisotropic plasticity model for clays. *Computers and Geotechnics*, 127, 103770.
- Rollo, F., & Amorosi, A. (2022). Isotropic and anisotropic elasto-plastic coupling in clays: a thermodynamic approach. *International Journal of Solids and Structures*, 248, 111668.
- Zhao, J., & Gao, Z. (2015). Unified anisotropic elastoplastic model for sand. *Journal of Engineering Mechanics* 142, No. 1, 04015056-1-12.