

MODELLAZIONE A GRANDI DEFORMAZIONI DEI FENOMENI DI LOCALIZZAZIONE DELLE DEFORMAZIONI IN BANDE DI TAGLIO MEDIANTE PLASTICITÀ AD INCRUDIMENTO NON LOCALE

K. Oliynyk

School of Science and Engineering, University of Dundee

Università degli Studi di Perugia

kateryna.oliynyk@icloud.com

Matteo O. Ciantia

School of Science and Engineering, University of Dundee

m.o.ciantia@dundee.ac.uk

C. Tamagnini

Università degli Studi di Perugia

claudio.tamagnini@unipg.it

Sommario

Nel presente lavoro una formulazione PFEM accoppiata per l'analisi di problemi di consolidazione in terreni saturi in condizioni di non-linearità meccanica e geometrica è stata impiegata per esplorare la possibilità di descrivere l'innescio e la propagazione di bande di taglio nei mezzi granulari e fornire una soluzione oggettiva – i.e., indipendente dalla discretizzazione – del comportamento di sistemi geotecnici nelle condizioni di post-localizzazione. Gli elementi fondamentali dell'approccio proposto nel presente lavoro sono: i) la formulazione in grandi deformazioni di un modello elastoplastico ad incrudimento isotropo per geomateriali con struttura, per l'implementazione all'interno del Particle Finite Element Method; e, ii) l'adozione di una formulazione non locale per le leggi di incrudimento, che fornisce al materiale la lunghezza caratteristica necessaria per definire lo spessore delle bande di taglio. I risultati di un programma di simulazioni numeriche di prove di compressione in condizioni di deformazione piana su un materiale ideale con le caratteristiche di una tipica calcarenite delle Puglie hanno permesso di verificare la convergenza delle soluzioni numeriche nella fase di post-localizzazione. Un aspetto originale del presente studio è rappresentato dal fatto che la verifica della convergenza è stata condotta non su discretizzazioni uniformi ma su discretizzazioni h -adattive non uniformi, che rappresentano un elemento essenziale del PFEM.

1. Introduzione

La localizzazione delle deformazioni in bande di taglio è un fenomeno molto frequente nei geomateriali, e può essere osservato a diverse scale, dalle bande di taglio formatesi in provini portati a rottura in laboratorio alle faglie a carattere regionale che si estendono nella crosta terrestre per centinaia di km quadrati. In funzione delle caratteristiche del materiale, le bande di taglio possono avere forme diverse, a livello mesoscopico: come zone di concentrazione e coalescenza di fratture in materiali fragili; come zone di rottura planare dal comportamento attritivo, o semplicemente come zone di elevata concentrazione di deformazioni di taglio. Nei mezzi granulari, le deformazioni di taglio possono essere accompagnate da dilatazione o contrazione.

L'importanza pratica dei fenomeni di localizzazione in ingegneria geotecnica deriva dal fatto che i cinematismi di collasso delle strutture geotecniche sono spesso caratterizzati dalla formazione e propagazione di bande di taglio. In tali circostanze, la definizione delle condizioni che portano all'innescio del fenomeno di localizzazione, così come la descrizione delle modalità di evoluzione delle condizioni di equilibrio del sistema in regime di post-localizzazione rivestono grande importanza.

Il presente lavoro ha come obiettivo la valutazione delle potenzialità offerte dal Particle Finite Element Method (PFEM) nella modellazione numerica dei fenomeni di rottura localizzata, senza incorrere nella limitazione tipica del classico metodo degli Elementi Finiti, consistente nella dipendenza patologica della soluzione numerica dalla discretizzazione spaziale impiegata.

L'elemento chiave nel presente lavoro è costituito dalla implementazione, all'interno di una piattaforma PFEM per l'analisi non-lineare dei problemi di deformazione e flusso idraulico accoppiati nei mezzi porosi, di un modello costitutivo ad incrudimento isotropo per geomateriali naturali strutturati – il modello FD_Milan – sviluppato nell'ambito della teoria della plasticità moltiplicativa e dotato di leggi di incrudimento non locale, di tipo integrale. Tali leggi di incrudimento forniscono al materiale la lunghezza caratteristica interna necessaria per poter identificare la dimensione della zona localizzata, altrimenti di spessore nullo nei modelli di materiale basati sul principio di azione locale. I dettagli del modello sono forniti nel successivo Paragrafo 2.

Una serie di simulazioni numeriche di prove di compressione in condizioni di deformazione piana su un materiale ideale con le caratteristiche di una tipica calcarenite delle Puglie, descritte nel Paragrafo 3, ha permesso di verificare la convergenza delle soluzioni numeriche nella fase di post-localizzazione. Il Paragrafo 4 conclude il lavoro con alcune considerazioni conclusive e suggerimenti per la prosecuzione della ricerca.

2. Il modello costitutivo FD_Milan Model

Il modello FD_Milan (Oliynyk et al. 2021) è sviluppato nell'ambito della plasticità moltiplicativa con legge di flusso non associata ed incrudimento isotropo formulato per grandi deformazioni a partire dalla decomposizione moltiplicativa del gradiente della deformazione e dalla adozione di una opportuna funzione energia libera per la definizione della risposta (iper)elastica del materiale. Il modello – che può essere considerato una estensione alle grandi deformazioni dei modelli sviluppati presso il Politecnico di Milano da Roberto Nova e dai suoi collaboratori – è in grado di descrivere quantitativamente gli effetti meccanici della presenza di struttura nei terreni naturali, mediante l'adozione di opportune variabili interne. Le leggi di incrudimento di tali variabili interne sono formulate in modo tale da descrivere gli effetti di destrutturazione meccanica causati dallo sviluppo di deformazioni plastiche. Le equazioni costitutive del modello, nella configurazione spaziale, sono qui sintetizzate brevemente:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{a}^e(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \quad (1)$$

$$\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \partial g / \partial \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

$$\dot{P}_s = \dot{\gamma} \rho_s P_s (\hat{V} + \xi_s \hat{D}) \quad (3)$$

$$\dot{P}_t = -\dot{\gamma} \rho_t P_t (|\hat{V}| + \xi_t \hat{D}) \quad (4)$$

Le leggi di evoluzione (1)-(4) sono soggette alle condizioni di complementarità di Kuhn-Tucker:

$$f(\boldsymbol{\tau}, P_s, P_t) \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\tau}, P_s, P_t) = 0 \quad (5)$$

Nelle espressioni precedenti, $\boldsymbol{\tau}$ e $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ rappresentano, rispettivamente, il tensore delle tensioni di Kirchhoff e la sua derivata (oggettiva) di Jaumann; \mathbf{d} è il tensore della velocità di deformazione; \mathbf{d}^p è la componente plastica della velocità di deformazione; \mathbf{a}^e è il tensore spaziale di rigidità elastica tangente del materiale; $\dot{\gamma}$ è il moltiplicatore plastico; f e g sono, rispettivamente, la funzione di snervamento ed il potenziale plastico del materiale (per i dettagli si veda Oliynyk et al. 2021); P_s e P_t sono le variabili interne del materiale, che controllano la forma e la dimensione del dominio elastico.

Le funzioni:

$$\hat{V} = \text{tr}(\partial g / \partial \boldsymbol{\tau}) \quad \hat{D} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\text{dev}(\partial g / \partial \boldsymbol{\tau})\| \quad (6)$$

definiscono, a meno del moltiplicatore plastico, le velocità di deformazione plastica di volume e deviatorica, rispettivamente, mentre ρ_s , ξ_s , ρ_t e ξ_t sono costanti del materiale. La variabile interna P_s (*pressione di preconsolidazione*) tiene conto degli effetti di incrudimento/rammollimento dovuti allo sviluppo di deformazioni plastiche nello scheletro solido. La variabile interna P_t (*cementazione intergranulare*), quantifica gli effetti della struttura nei materiali naturali, ed in particolare dei legami di cementazione tra i grani. Una rappresentazione della superficie di snervamento e del potenziale plastico nel piano degli invarianti della tensione di Kirchhoff $Q: P$, è fornita in Figura 1.

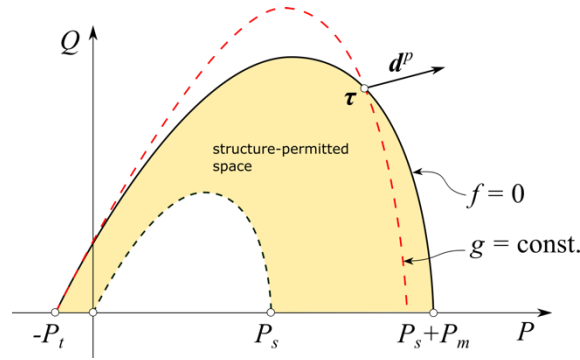


Figura 1. Superficie di snervamento e potenziale plastico di FD_Milan Model.

Un valore positivo di P_t determina l'espansione del dominio elastico nello spazio delle tensioni. Sulla parte positiva dell'asse P , la tensione di snervamento in compressione isotropa è incrementata della quantità $P_m = kP_t$, con k costante del materiale. Sulla parte negativa dell'asse P , il vertice della superficie di snervamento si trova alla coordinata $P = -P_t$: in presenza di struttura il materiale risulta pertanto dotato di coesione e di una resistenza a trazione non trascurabile. La regione nello spazio delle tensioni compresa tra la superficie di snervamento corrente e la superficie di snervamento intrinseca del materiale non strutturato (linea tratteggiata in Figura 1, con $P_t = P_m = 0$) è accessibile solo grazie all'effetto combinato di tessitura e cementazione tra i grani.

Quando lo scheletro solido subisce deformazioni plastiche, per effetto del riarrangiamento dei grani a livello microstrutturale i legami di cementazione tra i grani vengono progressivamente distrutti, fino a riportare il materiale in una condizione simile a quella del materiale non strutturato. Dal punto di vista macroscopico, tale processo è descritto dalla legge di incrudimento per P_t , eq. (4), che prevede un valore asintotico finale $P_t = 0$ (completa destrutturazione).

Le leggi d'incrudimento (3) e (4) possono essere poste nella seguente forma alternativa, ottenuta per integrazione nel tempo nel generico passo temporale $[t_n, t_{n+1}]$:

$$P_s = P_{s0} \exp\{\rho_s(E_v^p + \xi_s E_s^p)\} \quad P_t = P_{t0} \exp\{-\rho_t(N_v^p + \xi_t E_s^p)\} \quad (7)$$

nella quale le variabili interne cinematiche E_v^p (deformazione plastica di volume accumulata), E_s^p (deformazione plastica deviatorica accumulata) ed N_v^p (norma della deformazione volumetrica plastica accumulata) sono dotate delle seguenti leggi di evoluzione:

$$\dot{E}_v^p = \dot{\gamma} \hat{V} \quad \dot{E}_s^p = \dot{\gamma} \hat{D} \quad \dot{N}_v^p = \dot{\gamma} |\hat{V}| \quad (8)$$

Con il proposito di dotare il modello di una lunghezza caratteristica che permetta di definire lo spessore delle bande di taglio e regolarizzare le soluzioni numeriche ottenute in presenza di localizzazione delle deformazioni, le leggi di incrudimento locali definite nelle Eq. (7) ed (8) sono state rese non-locali mediante l'approccio integrale adottato da Oliynyk et al. (2021). In tale approccio, le variabili interne E_v^p, E_s^p ed N_v^p che compaiono nella Eq. (7) sono sostituite dalle loro medie spaziali calcolate su un

intorno Ω del punto materiale. La dimensione di tale intorno è controllata da una costante, ℓ_c , che rappresenta la lunghezza caratteristica del materiale. Le medie spaziali delle variabili interne sono calcolate mediante la seguente espressione:

$$\bar{A}(\mathbf{x}_i) = \left(1/\sum_{\mathbf{x}_j \in \Omega} w(\mathbf{x}_i, r_{ij})\right) \sum_{\mathbf{x}_j \in \Omega} w(\mathbf{x}_i, r_{ij}) A(\mathbf{x}_j) \quad (9)$$

nella quale il simbolo A rappresenta una qualsiasi delle variabili E_v^p, E_s^p o N_v^p . Nella Eq. (9), $r_{ij} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$ è la distanza tra i punti materiali posti in \mathbf{x}_i (baricentro di Ω) ed \mathbf{x}_j (punto materiale in prossimità di \mathbf{x}_i), mentre w è la funzione peso proposta da Galavi & Schweiger, (2010):

$$w(\mathbf{x}, r_{ij}) = \frac{r_{ij}}{\ell_c} \exp \left\{ - \left(\frac{r_{ij}}{\ell_c} \right)^2 \right\} \quad (10)$$

3. Simulazioni PFEM di prove di compressione in condizioni di deformazione piana

Nelle simulazioni PFEM finalizzate a valutare l'efficacia del modello proposto nella descrizione dei processi di localizzazione delle deformazione in bande di taglio, una serie di provini prismatici, con dimensioni nominali $B = 1.0$ m e $H = 1.8$ m, è stato sottoposto a prove di compressione rettilineare, in condizioni di deformazione piana. Il peso proprio del materiale è stato posto pari a zero, per garantire l'uniformità delle componenti di tensione nelle condizioni iniziali; pertanto l'effettiva larghezza dei provini non è rilevante. In corrispondenza della base inferiore, la componente verticale dello spostamento è stata vincolata, mentre sulla base superiore è stato imposto uno spostamento verticale verso il basso, $u(t)$, crescente linearmente col tempo, fino ad un massimo di $u/H = 0.20$. Su entrambi i contorni laterali è stata imposta una pressione normale di compressione costante, p_0 . Tutte le simulazioni sono state eseguite assumendo condizioni drenate, con pressione dell'acqua interstiziale nulla. Due serie di simulazioni sono state condotte considerando le basi del provino perfettamente scabre (spostamenti orizzontali vincolati) o perfettamente lisce (assenza di sforzi di taglio). Le costanti del materiale impiegate nelle simulazioni sono riportate nella Tabella 1. Tali costanti, prese da Oliynyk et al. (2021), possono essere considerate rappresentative per una calcarenite naturale.

Tabella 1. Costanti del modello FD_Milan adottate nelle simulazioni numeriche.

$\hat{\kappa}$ (-)	G_0 (MPa)	α (-)	P_{ref} (MPa)	$M_{f,c}$ (-)	α_f (-)	μ_f (-)	$M_{g,c}$ (-)
0.24	45.45	0.0	10.0	1.30	0.75	1.50	1.675
α_g (-)	μ_g (-)	ρ_s (-)	ρ_t (-)	ξ_s (-)	ξ_t (-)	k (-)	ℓ_c (m)
0.01	1.20	20.0	15.0	0.0	0.5	5	variabile

In tutte le simulazioni, i valori iniziali di P_s e P_t sono stati fissati a 300 kPa e 200 kPa, rispettivamente. Il programma completo delle simulazioni delle prove di compressione piana è riportato in Tabella 2.

Le 6 simulazioni del Gruppo 1 (r100-r105) sono state eseguite per investigare la convergenza della soluzione numerica nel regime di post-localizzazione, al diminuire delle dimensioni degli elementi. Le simulazioni del Gruppo 2 sono finalizzate ad investigare gli effetti della lunghezza caratteristica sulle proprietà delle bande di taglio, con particolare attenzione al loro spessore. Per ragioni di spazio, nel seguito verranno discussi solamente alcuni dei risultati del Gruppo 1.

Tipicamente, studi di convergenza di questo tipo sono condotti adottando discretizzazioni spaziali uniformi, riducendo la dimensione degli elementi sull'intero dominio di calcolo (si veda, ad es., Mánica et al., 2018). Nel presente lavoro, invece, lo studio di convergenza è eseguito considerando discretizzazioni non uniformi, caratterizzate da h -adattività, valutando la convergenza dei risultati numerici al diminuire del rapporto h_{crit}/ℓ_c tra la minima dimensione degli elementi imposta all'algoritmo di remeshing, h_{crit} , e la lunghezza caratteristica. La motivazione per tale scelta risiede nel fatto che il remeshing adattivo rappresenta una componente essenziale della strategia algoritmica del

PFEM, ed è essenziale per garantire una elevata efficienza computazionale nella soluzione di problemi applicativi di interesse pratico. Per confronto, le ultime due simulazioni di questo gruppo (r104 ed r105) sono state eseguite adottando discretizzazioni uniformi (rispettivamente molto fine e molto grossolana).

Tabella 2. Programma delle simulazioni numeriche.

Gruppo 1	r100	r101	r102	r103	r104	r105
p_0 (MPa)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ℓ_c/B	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
h_{crit}/ℓ_c	0.07	0.10	0.33	0.50	0.10	0.67
Basi	scabre	scabre	scabre	scabre	scabre	scabre
Gruppo 2	r200	r201	r202	r203	r204	r205
p_0 (MPa)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ℓ_c/B	0.10	0.15	0.30	0.10	0.15	0.30
h_{crit}/ℓ_c	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
Basi	scabre	scabre	scabre	scabre	scabre	scabre

La Figura 2a mostra le mappe a curve di livello di E_s^p per le simulazioni r100 ed r101, eseguite con i due valori più bassi del rapporto h_{crit}/ℓ_c , al variare dell'accorciamento del provino. Si osserva come la localizzazione delle deformazioni si manifesti con due bande di taglio coniugate, innescate dal vincolo cinematico imposto in corrispondenza delle basi scabre nel momento in cui il materiale plasticizza.

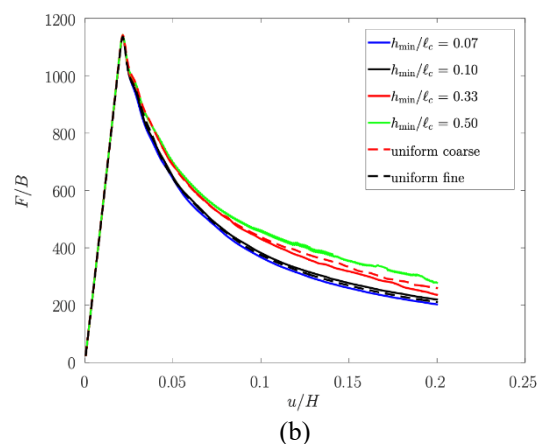
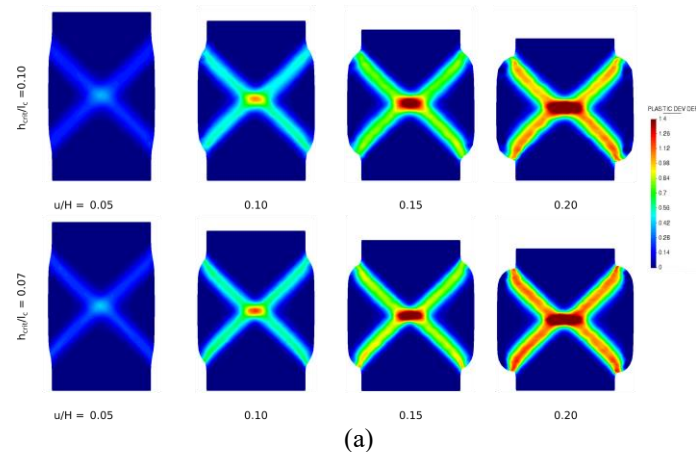


Figura 2. Risultati simulazioni del Gruppo 1. a) Localizzazione delle deformazioni al variare dell'accorciamento assiale del provino. Riga superiore: simulazione r101; riga inferiore: simulazione r100.
b) Curve carico-spostamento assiale per diversi valori di h_{crit}/ℓ_c .

Dal momento della loro formazione, le deformazioni nel provino si concentrano nelle bande di taglio,

mentre il restante volume rimane praticamente indeformato. Dal confronto tra le due simulazioni si può osservare come tanto la configurazione geometrica delle bande di taglio quanto il loro spessore siano praticamente identici nei due casi, pur in presenza di due diverse discretizzazioni.

La Figura 2b riporta l'andamento della forza verticale media per unità di area, F/B , alla testa del provino in funzione dell'accorciamento imposto u/H , per tutte le simulazioni del Gruppo 1. Tutte le curve carico-spostamento mostrano un comportamento a rottura di tipo fragile, simile a quello osservato da Lagioia & Nova (1995) in prove TX drenate su provini di calcarenite di Gravina a basse tensioni di confinamento. Tali curve non rappresentano la risposta costitutiva del materiale, dal momento che gli stati di sforzo e deformazione all'interno del provino non sono omogenei. Si nota come il rapporto h_{crit}/ℓ_c influenzi la risposta del sistema nella fase successiva al picco di resistenza per valori di h_{crit}/ℓ_c superiori a 0.10. Le curve carico-spostamento relative alle simulazioni r100 ed r101 (adattive) e quella della simulazione r104 (uniforme), eseguite con valori di h_{crit}/ℓ_c uguali o inferiori a tale rapporto sono invece praticamente coincidenti. Ciò dimostra che è possibile ottenere risultati oggettivi, indipendenti dalla discretizzazione, in presenza di bande di taglio purché le dimensioni degli elementi impiegati nella zona di localizzazione delle deformazioni siano sufficientemente piccoli da cogliere l'andamento del campo di deformazione all'interno della banda, il cui spessore è controllato da ℓ_c .

4. Considerazioni conclusive

La piattaforma computazionale PFEM messa a punto e descritta nel presente lavoro si è dimostrata molto efficace nel simulare processi di deformazione caratterizzati dalla formazione spontanea di bande di deformazione localizzata. L'adozione di leggi di incrudimento non locale nel modello costitutivo messo a punto per la descrizione del comportamento meccanico di terreni naturali con struttura e di rocce tenere ha permesso di introdurre una lunghezza interna che controlla lo spessore della zona localizzata e permette di eliminare la dipendenza patologica dalla discretizzazione caratteristica delle soluzioni numeriche basate su modelli costitutivi di tipo locale. Nel contesto del PFEM con remeshing di tipo h -adattivo, soluzioni indipendenti dalla discretizzazione in presenza di localizzazione delle deformazioni possono essere ottenute mantenendo la dimensione minima degli elementi adeguatamente inferiore alla lunghezza caratteristica del materiale. Tale risultato è di grande importanza, poiché implica che soluzioni numeriche oggettive possono essere ottenute partendo da una discretizzazione relativamente grossolana, che viene successivamente infittita solo ove necessario, consentendo una significativa diminuzione degli oneri computazionali.

Bibliografia

- Galavi, V., & Schweiger, H. F. (2010). Nonlocal multilaminate model for strain softening analysis. *International Journal of Geomechanics*, 10(1), 30–44.
- Lagioia, R., & Nova, R. (1995). An experimental and theoretical study of the behaviour of a calcarenite in triaxial compression. *Géotechnique*, 45(4), 633–648.
- Mánica, M. A., Gens, A., Vaunat, J., & Ruiz, D. F. (2018). Nonlocal plasticity modelling of strain localisation in stiff clays. *Computers and Geotechnics*, 103, 138–150.
- Oliynyk, K., Ciantia, M. O., & Tamagnini, C. (2021). A finite deformation multiplicative plasticity model with non – local hardening for bonded geomaterials. *Computers and Geotechnics*.